



Taller de geometria dinàmica amb GeoGebra. Un pont entre els llibres i el material

Isabel Sorigué Ric

Escola Diputació i Associació Catalana de GeoGebra, Barcelona, isorigue@xtec.cat

Amb la col·laboració de Bernat Ancochea i Joana Villalonga


Resum del taller

L'objectiu d'aquest taller és donar a conèixer el programa GeoGebra com una eina més a utilitzar en les aules dels nostres alumnes més joves a l'hora de treballar la geometria, considerant el taller com una iniciació a GeoGebra.

GeoGebra és eina TAC que considerem molt potent perquè amb ella podem treballar les matemàtiques de manera dinàmica i interactiva. Permet als alumnes modificar i desplaçar figures en 2D i a més a més veure les de 3D des de diferents punts de vista. En el taller practicarem aquest dinamisme i interactivitat utilitzant les eines bàsiques de GeoGebra mitjançant exemples d'activitats pràctiques portades a les aules d'Infantil i Primària que no pretenen ser referents sinó mers exemples.

Descobrirem com donar vida les figures estàtiques (llibres) per apropar-les a les reals.

PARAULES CLAU: Espai i forma, Matemàtiques dinàmiques, GeoGebra

Aquests materials estan sota una llicència Creative Commons 4.0 Internacional del tipus 
--

1. Breu explicació sobre el programa GeoGebra.

GeoGebra és un programari lliure i interactiu de matemàtiques dinàmiques amb finalitat educativa iniciat per Markus Hohenwarter a la Universitat de Salzburg al 2001. Aquesta eina TAC utilitza i combina geometria (2D i 3D) i àlgebra en un sol programa que és fàcil d'utilitzar a tots els nivells educatius des d'infantil fins a la universitat.

Amb el temps GeoGebra ha esdevingut una comunitat, amb milions d'usuaris en gairebé tots els països, d'aquí que es trobi traduït a més de 40 idiomes inclòs el català. GeoGebra disposa d'un web particular d'on ens podem descarregar gratuïtament el programa per a diferents dispositius electrònics o bé usar-lo directament en línia, alhora que compartir (pujar descarregar) materials creats amb GeoGebra amb tots els seus usuaris. La imatge següent mostra l'aparença de la pàgina principal del web de GeoGebra: www.geogebra.org

En el nostre cas, treballarem amb l'aplicació de GeoGebra instal·lable. La seva instal·lació és ràpida i immediata.

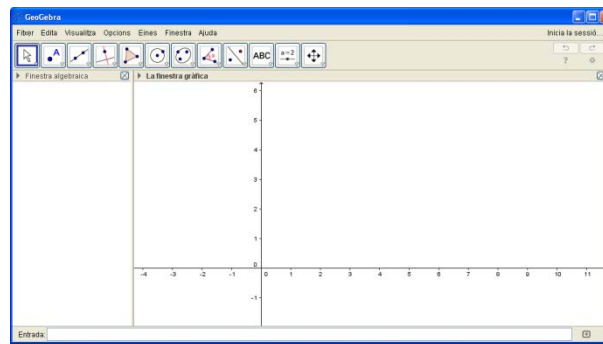


Un dels lemes que més ens agrada de GeoGebra és: adopta, adapta, crea i comparteix. Adopta perquè el pots utilitzar, adapta i crea perquè pots crear recursos i adaptar-los segons les necessitats dels teus alumnes i comparteix perquè existeix una xarxa (GeoGebra materials) on pots compartir els teus treballs i comunicar-te amb altres mestres i professors a través de les associacions o instituts Geogebra que hi ha a tot el món (aquí a Catalunya tenim l'Associació Catalana de GeoGebra "ACG" com la mateixa organització geogebra.org.com).

Tot això permet la col·laboració de mestres de la mateixa etapa o etapes molt distanciades, com és el nostre cas: Bernat Acochea (batxillerat), Joana Villalonga (primària) i Isabel Sorigué (educació infantil). Els exemples de les activitats que presentem al taller són fruit de la nostra col·laboració.

2. Aparença del GeoGebra

El GeoGebra presenta diferents ambients de treball, en funció de la matemàtica que vulguem visualitzar: la finestra algebraica, el full de càlcul, CAS, la finestra gràfica, la finestra gràfica 3D,... En general, en obrir el programa, el GeoGebra mostra una barra d'eines, i la finestra algebraica, la finestra gràfica i línia d'entrada.



Aparença del programa GeoGebra.

Nosaltres treballarem, principalment amb la finestra gràfica, destinada al treball geomètric en dues dimensions, però també farem servir la segona finestra gràfica i la finestra gràfica 3D.

Fer o no visibles els diferents ambients de treball del GeoGebra no té cap secret. Simplement cal anar a *Visualització* i seleccionar o de-seleccionar les vistes en què vulguem o no treballar.

3. Activitats del taller

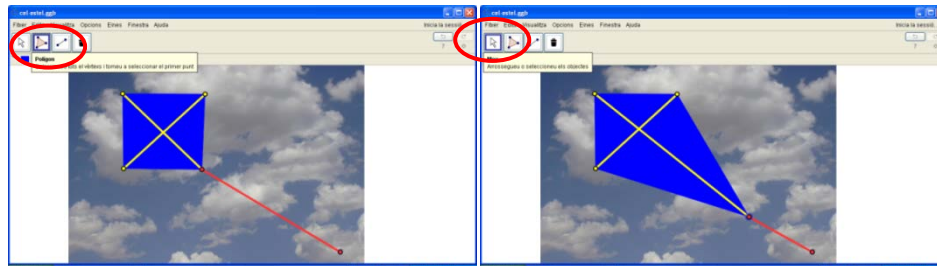
La finalitat del taller és compartir activitats que s'han portat a terme en aules d'Educació Infantil i Primària per donar a conèixer les opcions de treball que ens ofereix el GeoGebra. Per això, explicarem quines són les eines de GeoGebra amb exemples d'activitats portades a l'aula i que descrivim a continuació.

Trobareu els Applet de GeoGebra de les activitats proposades i els vídeos de com estan construïts en el [llibre](#) *C2EM. Taller de geometria dinàmica* (materials de GeoGebra)

<http://www.geogebra.org/m/ujaJn6gu?doneurl=%2Fb.ancochea%252Bi.sorigu%2525C3%2525A9>

L'estel

Activitat per dibuixar polígons i modificar-los utilitzant les eines *polígons*, *mou* i que també ens servirà per aprendre a personalitzar la barra d'eines.



Activitat 1. L'estel

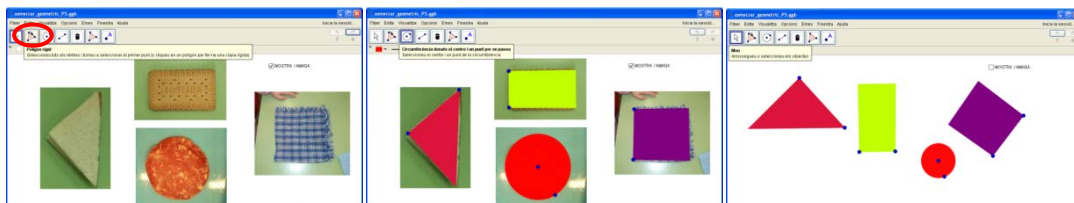
Aquesta activitat ens serveix per explicar el concepte de polígon, no només del quadrat, rectangle i triangle, sinó de qualsevol superfície delimitada per una línia poligonal tancada, com per exemple una estrella. Alhora, permet contrastar el concepte de polígon amb el de superfícies rodones. Amb els més petits permet fer la diferència entre els objectes que tenen vèrtex (puntes pels infants de P3) i els que no en tenen. Llavors, dibuixem els polígons indicant els seus vèrtex, i no els costats.

En funció de com s'hagin construït els polígons, també ens serveix per modificar els polígons. Un quadrat pot passar a trapezi, encara que no utilitzem el vocabulari correcte, els alumnes saben distingir les formes geomètriques. Com per exemple les diferents formes de les taules que trobem a l'aula.

Per altra banda, veurem que si no necessitem totes les eines podem personalitzar la barra d'eines.

L'esmorzar geomètric

Activitat dirigida al reconeixement de les formes geomètriques utilitzant les eines *polígons rígids* i *regulars*; *cercles* i *circumferències*. Amb ella també anomenarem i dessem.



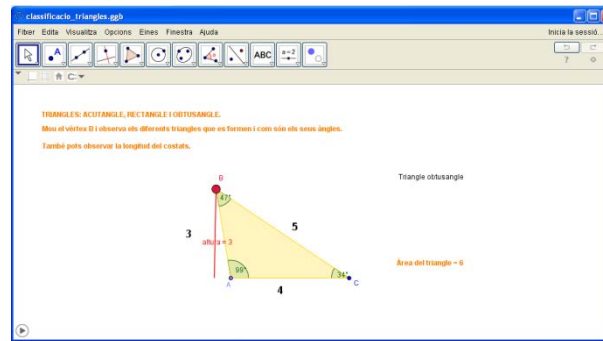
Activitat 2. Esmorzar geomètric

A diferència de com hem construït els polígons en l'activitat anterior, en aquesta activitat treballarem l'ús l'eina del polígon rígid per veure que un polígon no canvia de forma encara que el fem girar. Un quadrat no es converteix amb un rombe, sempre és un quadrat. El triangle continua sent un triangle encara que el fem girar.

En algun moment voldrem guardar les nostres feines. Per guardar el que hem fet amb GeoGebra, ho podem fer anat a la barra menú a *fitxer*, i seleccionar *desar* o *desar i anomenar*, o també ho podem exportar a GeoGebra materials (compartint-lo o no) anat a *fitxer*, *comparteix*, *exporta*, *construcció interactiva com a pàgina web*.

Classificació de triangles

Activitat destinada al reconeixement dels diferents tipus de triangles. Aprendre a construir un polígon amb paral·leles i perpendiculars utilitzant les eines corresponents que trobem a la barra d'eines i l'eina *Intersecció*. També aconseguirem moure el triangle *activant l'animació*



Activitat 3. Classificació de triangles

En aquesta activitat construirem un rectangle de manera diferent a com ho podem fer en les anteriors activitats, conservant les propietats del rectangle però podent modificar la mida i la posició.

Començarem amb una línia recta, dues perpendiculars i una paral·lela de la primera línia, per formar un rectangle (és convenient fer un punt d'intersecció entre les línies amb l'eina *Intersecció*).

Unim els punts d'intersecció amb l'eina *Polígon* i amaguem les línies rectes des de la finestra algebraica o amb el botó dret del ratolí sobre cada línia.

Hem construït un rectangle que podem modificar sense perdre les propietats.

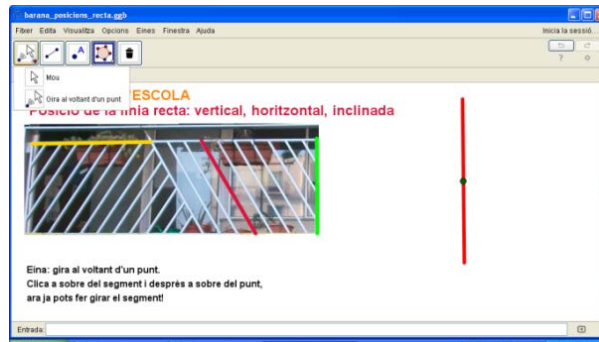
Per inserir el triangle dintre del rectangle, posem un punt en el costat superior del rectangle (serà el vèrtex superior) i dibuixeu un triangle amb l'eina *Polígon*. Si cliquem sobre el vèrtex superior i *activem l'animació* (botó dret del ratolí sobre) veurem com el mateix triangle passa de ser rectangle a acutangle i obtusangle.

En aquesta activitat es mesuren longituds, angles i superfícies, en una altra activitat explicarem com es fa.

La barana de l'escola

Aquesta activitat està pensada per reconèixer les diferents posicions d'una recta o un objecte utilitzant les eines *gira al voltant d'un punt*, alhora que veurem com *inserir un text* i fixar-lo.

A vegades els nostre alumnat dibuixa una recta vertical, horitzontal o inclinada com si aquestes tinguessin entitat pròpia i no com si fos una mateixa recta (o qualsevol altra figura) situada en diferent posició.



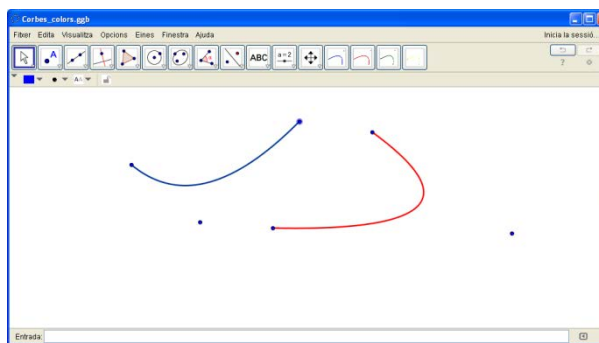
Activitat 4. Barana de l'escola

Utilitzant l'eina girar al voltant d'un punt, podem fer girar el segment o un polígon irregular, un cercle... i així donar l'evidència que diferents rectes poden ser una mateixa, però vista des de diferents perspectives.

En algunes feines, voldrem afegir alguns noms o descripcions. Per inserir un text en el fitxer de l'activitat, tan sols cal clicar l'eina text, i en podem modificar el tipus de text, la mida i el color, alhora que també el podem fixar a la finestra.

El Menjalínies

Activitat de dibuix real o imaginari amb línies i formes geomètriques utilitzant les eines *recta*, *segment*, *recta paral·lela*, *recta perpendicular*, *circumferències*, *ovals*, *corbes*... *esborrar*. Com ha dibuix que haurem fet, ens interessa veure com exportar imatges creades i imprimir-les.



Activitat 5. El Menjalínies

Aquestes activitats lliures són molt motivadores i ajuden molt a l'alumnat a aprendre a utilitzar les eines que necessiten.

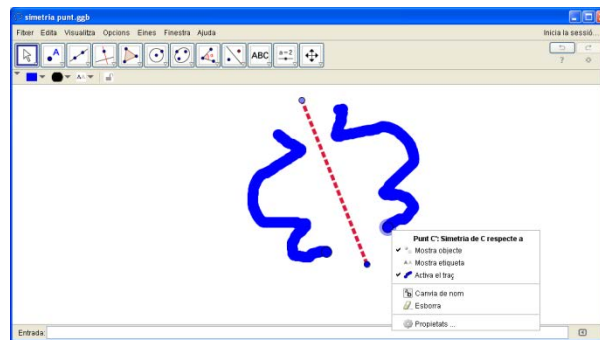
A vegades convé donar eines concretes. En aquest cas, ens ha interessat crear una eina nova per a poder dibuixar corbes que afegim a la barra d'eines. Es pot trobar a ARC (<http://apliense.xtec.cat/arc/node/29263>).

A l'hora de dibuixar, potser necessitem esborrar. Per esborrar un element ho podem fer de diferents maneres: amb la eina *esborra* utilitzant les diferents mides de la goma, cliclant sobre l'element a esborrar o també amb el *Supr* del teclat de l'ordinador o a *propietats*, *esborra*.

A l'hora d'exportar la imatge, tenim diferents maneres de fer-ho. Si només volem desfer la imatge i no necessitem el dibuix com a activitat GeoGebra, es pot guardar amb format png, PDF o porta-retalls. Per això només cal anar a *fitxer*, *exporta*, *zona gràfica com a...* O també es pot imprimir la imatge directament anant a *fitxer*, *previsualitza*.

Simetries

GeoGebra permet simular diferents tipus de simetries. La següent activitat per crear la simetria d'un punt utilitzant l'eina *simetria axial* a l'hora que activem el traç d'un punt.



Activitat 6. Simetries

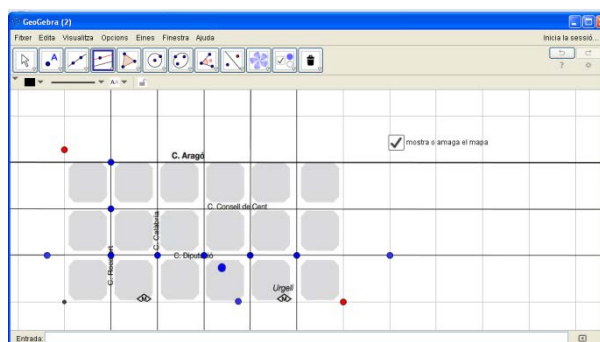
Dibuixant l'eix de simetria amb un segment d'una longitud donada i després dibuixar un punt, figura, cos o imatge es pot crear la seva simetria clicant sobre l'eina *simetria axial*.

És important variar de posició l'eix de simetria per veure que no sempre ha de ser vertical, com també moure el punt.

Si dibuixem un punt en un costat de l'eix i activem el traç del punt i del seu simètric amb l'opció *Activa el traç* que apareix en clicar el botó dret del ratolí, podem veure els rastres que es generen en moure el punt.

Mapa de l'Eixample

Activitat d'observació d'un mapa, utilitzant les eines *recta paral·lela* i *recta perpendicular*. També *Inserir una imatge, casella control per mostrar i amagar un objecte*



Activitat 7. Mapa de l'Eixample

Les imatges ens ajuden a observar el món que ens envolta, d'aquí ve la importància de treballar amb elles.

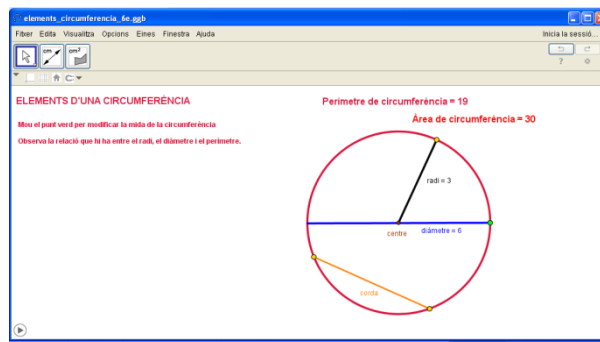
Per inserir una imatge cliquem la icona *Imatge* i el lloc on volem inserir-la. Si la imatge és més gran del que volem la podem ajustar movent els seus vèrtex, ja sigui directament o indicant la seva posició amb el desplegament de propietats d'imatge.

L'eina *Casella control per mostrar i amagar un objecte* ens serveix per amagar o visualitzar una imatge.

De manera generalitzada, les paral·lels i perpendiculars es presenten a l'aula per parelles, de dues en dues, i en posició vertical i horitzontal. Amb GeoGebra és fàcil mostrar com no sempre és així, ja que les podem moure sense perdre les seves propietats.

El cercle, la circumferència i les seves parts

Activitat amb els elements d'una circumferència amb les eines: *Longitud*, *perímetre o distància* i *Àrea*. També veurem com etiquetar amb noms i arrodonir de les xifres decimals.



Activitat 8.El cercle, la circumferència i les seves parts

Amb aquesta activitat didàctica els alumnes poden comprovar la relació que hi ha entre els diferents elements d'una circumferència ja que movent un dels elements també es mouen els altres i es va mesurant a mesura que modifiquem. També podem veure la relació que hi ha entre una circumferència i un cercle

Dibuixar una recta, i una circumferència que té el centre en un punt de la recta i longitud fins l'altre punt de la recta. Esborrar la línia.

Dibuixar el radi, el diàmetre i la corda. Després escriure el nom a la etiqueta (botó esquerre sobre l'element, propietats, bàsic, escriure el nom, mostra etiqueta).

Amb l'eina Longitud senyalar l'objecte que es vol mesurar.

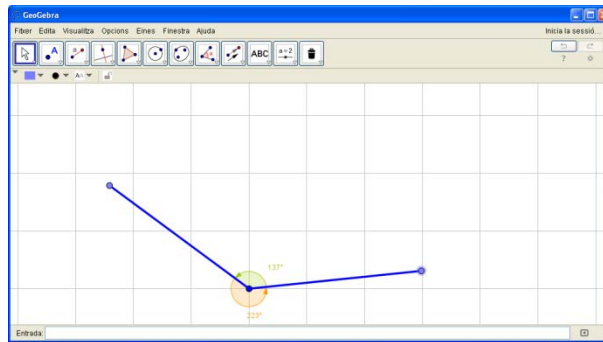
Amb l'eina Àrea per calcular l'àrea.

Si no volem decimals arrodonim la xifra sense decimals: *opcions*, *arrodoniment*, *0 xifres decimals*.

Angles i diagonals d'un polígon regular

Amb aquesta proposta treballarem dues maneres de crear i fer servir els angles. Les eines que ens ho permetran són: *Angle* i *Angle amb una amplitud donada*. També farem usarem etiquetar amb noms, l'arrodoniment de les xifres decimals, i visualitzar el passos de la construcció.

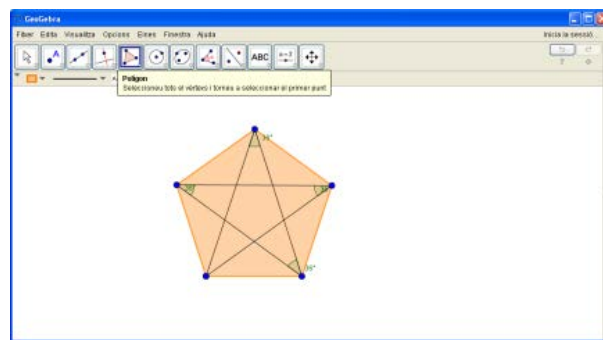
Per construir un angle s'han de seleccionar dos segments (de longitud donada) que formin un angle i clicar a l'eina *Angle*. De manera immediata obtindrem la mesura de l'angle entre els dos segments. Cal vigilar perquè en funció de la direcció en que clicquem els segment, calcularem l'angle interior o exterior a ells.



Activitat 9. Els angles

Una altra manera de dibuixar angles és amb l'eina *angles amb una amplitud donada*. En aquest cas, a partir d'una mesura d'angle donada. Aquesta és l'eina que ens ajudarà a construir les diagonals d'un polígon regular, com pot ser un pentàgon.

Dibuixar un segment i clicar sobre l'eina, després sobre els punts del segment indicant que l'angle ha de ser de 36° . Unir els punts amb un segment i tornem a clicar l'eina angle, i així successivament fins que coincideixi amb el primer segment. Quan s'uneixen tots els punts s'obté un pentàgon.

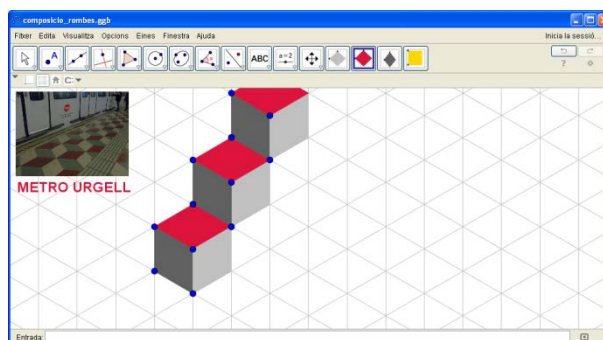


Activitat 9. Les diagonals d'un polígon

GeoGebra permet recuperar els passos de com està construït un objecte, o una activitat completa. Per això només cal activar *Passos de la construcció* del desplegable *Visualitza*. Les diferents opcions d'aquesta vista ens permet anar endavant o endarrere de la construcció.

Rombes al metro

Activitat de tessellar-les *creant una eina nova*. També canviem la quadrícula i el color dels polígons.



Activitat 10. Rombes al metro

A vegades necessitem crear eines noves, per fer-ho primer hem de dibuixar o construir la figura. Feta la figura, només cal anar a Eines, crea eina nova, i indicar quins són els objectes d'entrada, els objectes de sortida, el nom de l'eina i la seva icona. Per indicar la icona, tan sols cal seleccionar una imatge de l'eina que hem creat, que prèviament hàgim guardat exportant-la com a jpg.

Per aquesta activitat, on proposem emprar tessel·les en forma de rombes, ens convindrà la creació de l'eina rombe.

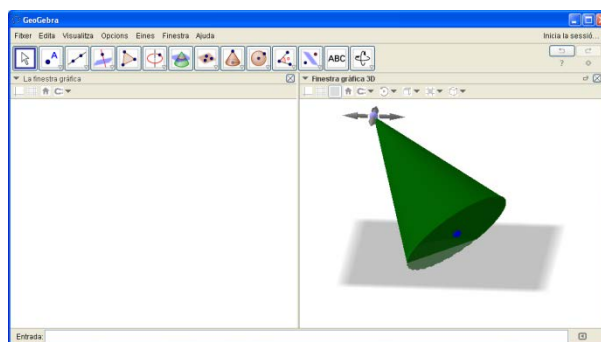
Per a facilitar la construcció del rombe canviem graella quadriculada que apareix per defecte en les sessions de GeoGebra. En comptes de treballar amb la quadrícula cartesiana treballarem amb la isomètrica. Per això fem botó de la dreta sobre la finestra gràfica, i seleccionem *preferències, graella, isomètrica*.

Per crear eines similars a la primera (per exemple d'igual forma però diferent color), només cal canviar-li les propietats que la defineixen (en aquest cas el color a la que ja tenim i un cop modificada, guardar-la com a nova eina).

Podem canviar les propietats de la figura, com el color, amb el desplegament que trobem a la barra o bé clicant el botó dret del ratolí a sobre de l'objecte per veure les propietats de la figura en qüestió.

Els cossos geomètrics

Es pot utilitzar la finestra gràfica en 3D per crear cossos geomètrics.



Activitat 11. Els cossos geomètrics

A la finestra es veu un cub que limita l'espai de la figura en 3D, un eixos i un pla. Es pot adaptar la visualització de la finestra per a obtenir una la visió més clara per als alumnes d'Infantil i primers cursos de Primària.

Clicant (botó de la dreta del ratolí) sobre el cub per anar a la *finestra gràfica* i desmarcar la *representació de les figures*.

També es pot treure l'eix de simetria si l'alumnat no està habituat a treballar-hi.

Es pot començar per utilitzar les eines per construir prismes, piràmides i esferes.

Per passar una figura en 2D a 3D en forma de piràmide, prisma, con o cilindre es clica sobre les eines: *Crea un... a partir de la base*.

Si es vol crear la figura 3D directament s'utilitzen les eines: *prisma, piràmide, con, cilindre i esfera*. Es poden modificar amb les fletxes en sentit vertical i horitzontal.

També és molt interessant utilitzar l'eina per girar la finestra 3D i poder veure la figura des de diferents punts de vista donant la sensació de manipular-la.

4. Reflexió metodològica sobre la seva aplicació a l'aula

Un dels motius més interessants per utilitzar el programa és la seva característica dinàmica, és a dir, que quan nosaltres dibuixem una figura geomètrica amb 2D o 3D amb GeoGebra la podem modificar, canviant-li el color, la mida, la posició, entre d'altres característiques, sense necessitat d'esborrar-la i torna-la a dibuixar. D'aquí que, amb el GeoGebra sovint es parla de construir i no tant sols de dibuixar.

Amb el GeoGebra podem construir tot tipus d'objectes i figures geomètriques, representar qualsevol tipus de moviment, ja sigui en el pla o a l'espai, alhora que determinar les diferents mesures que puguin derivar d'aquestes construccions.. Podem, doncs, dibuixar línies i segments, paral·leles, perpendiculars, cercles, circumferències, arcs i sectors circulars, ovals..., representar simetries, girs i desplaçaments de les figures, i els alumnes més grans (o sempre que ens interessi), poden mesurar-ne les seves dimensions, com la longitud, distàncies, superfícies....

L'ús i la finalitat del GeoGebra és ampli i divers. En el nostre cas, utilitzem aquest programa perquè ens ajuda a:

Reproduir activitats que hem fet a l'aula per focalitzar conceptes clau.
Dissenyar recursos GeoGebra producte de l'experimentació i les reflexions que fem quan utilitzem un material o visionem imatges.
Dissenyar recursos GeoGebra per aclarir els dubtes que els alumnes expressen.
Dissenyar recursos GeoGebra per introduir o exemplificar conceptes.
Dissenyar recursos GeoGebra que comportin l'experimentació.
Proposar activitats lliures perquè els alumnes experimentin i fomentin la seva creativitat.

5. Conclusió

Nosaltres considerem el programa GeoGebra com una eina més de les que podem disposar a les aules, que ens ajuda en el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques tant als mestres com a alumnes, qui volem que se la facin seva per tal que la puguin utilitzar en qualsevol altre moment i situació, igual que ho fan amb un llapis, un guix, uns retoladors...

6. Biografia

Bernat Ancochea i Isabel Sorigué. *C2EM. Taller iniciació geometria dinàmica*. Accés des de <https://www.geogebra.org/materials>