C²EM BARCELONA 2016 CONGRÉS CATALÀ D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA

Geometria i raonament visual per introduir el llenguatge algebraic

Iolanda Guevara Casanova [1]**,Carme Burgués Flamarich**[2]

[1] Dept. d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya i Dept. de Didàctica de les Matemàtiques i Ciències Experimentals de la UAB, iolanda.guevara@gmail.com

Dept. de Didàctica de les Matemàtiques i Ciències Experimentals de la UB, cburgues@ub.edu

Resum de la comunicació

En l'educació secundària obligatòria la introducció i l'ús del llenguatge algebraic és difícil per a la majoria de l'alumnat pel grau d'abstracció que comporta. En aquesta comunicació es presenten unes activitats sobre problemes de triangles rectangles i resolució d'equacions de segon grau, implementades amb alumnes de 3r d'ESO. Amb elles es relaciona el llenguatge simbòlic de l'àlgebra amb la geometria, es potencia el pensament i el raonament visual dels alumnes, per tal de millorar l'aprenentatge d'aquest nou llenguatge a base de fer-lo més significatiu i lligat a l'adquisició de les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Els exemples utilitzats provenen de la història de les matemàtiques.

PARAULES CLAU: llenguatge algebraic, visualització, història de les matemàtiques.

1. Introducció

En l'etapa de l'educació secundària obligatòria l'ensenyament/aprenentatge de l'àlgebra inclou estructures, relacions i llenguatge, però la introducció i l'ús d'aquest llenguatge és difícil per a la majoria de l'alumnat pel grau d'abstracció que comporta.

L'àlgebra és el bloc de continguts més extens de l'actual currículum de matemàtiques (CATALUNYA. DECRET 187/2015), per aquesta raó s'ha centrat l'estudi en un camp de treball més acotat: la visualització d'alguns processos matemàtics. La decisió s'ha pres perquè hi ha moltes teories sobre els avantatges d'aquest mètode, dins de l'àmbit educatiu i en particular en l'educatiu matemàtic (Arcavi, 2003), (Burgués, 2008), (Giaquinto, 2007) (Mason et al. 2005) i també pel paper que té en el món d'avui dia.

En el treball es planteja la idoneïtat de relacionar el llenguatge simbòlic de l'àlgebra amb la geometria, amb la intenció de potenciar el pensament i el raonament visual dels alumnes, per millorar l'aprenentatge d'aquest nou llenguatge a base de fer-lo més significatiu i lligat a l'adquisició de les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic (Burgués, Serramona, 2013). L'eina utilitzada per establir la connexió geometria-àlgebra són els diagrames.

La introducció de diagrames pretén connectar el pensament simbòlic propi de l'àlgebra amb el pensament visual relacionat amb les figures geomètriques. Historiadors, pedagogs (Katz i Barton, 2007) i molts especialistes en didàctica de la matemàtica (NCTM, 2000; Niss, 2002, 2011) defensen la connexió entre continguts aparentment diferents com una de les accions integrades en els processos matemàtics.

Fa uns anys, havia estudiat alguns diagrames que provenien de la història de les matemàtiques, els havia dut a l'aula (Guevara 2006, 2009a, 2009b) però no havia analitzat fins a quin punt la seva introducció havia millorat l'aprenentatge dels alumnes. Ara era l'ocasió de posar-los en el punt de mira perquè s'ajustaven perfectament a determinats continguts del currículum d'àlgebra sobre els que es volia incidir.

Els problemes proposats als alumnes corresponen a situacions on intervenen triangles rectangles o bé resolució d'equacions de 2n grau. En tots els casos, la proposta passa perquè els alumnes transfereixin el raonament expressat en forma lingüística (expressions algebraiques de 2n grau) al raonament visual amb diagrames (figures amb quadrats i rectangles) que són la interpretació geomètrica de les expressions algebraiques de 2n grau. Per tant, la recerca està centrada en el procés d'aprenentatge dels alumnes, específicament en els resultats aconseguits pels alumnes utilitzant aquests diagrames.

Els problemes en els que intervenen triangles rectangles corresponen al capítol 9 dels Nou capítols, problemes 1-13 i 24 en la versió de Chemla & Shuchun (2005). En la figura 1 es reprodueix un d'aquests diagrames. El que interessa destacar és la justificació del procediment de càlcul del text clàssic (s. I) amb raonaments geomètrics que fa Lui Hui en l'edició de l'any 263. Aquestes raonaments geomètrics han estat estudiats i transcrits en forma de figures per diferents historiadors de la matemàtica xinesa antiga (Cullen, 1996), (Chemla & Shuchun, 2005), (Dauben, 2007).

Figura 1: Diagrames dels *Nou capítols* en l'edició de Bao Huanzhi (1213) segons Chemla & Shuchun (2005)

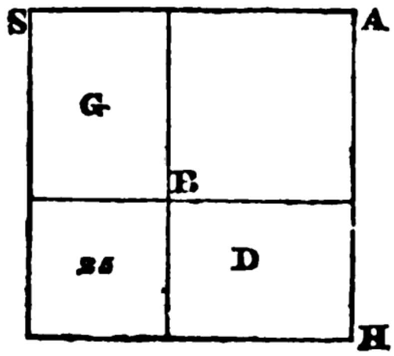


Figura 2: Al-Khwārizmī (813), *Tractat d'àlgebra* Ed. Rosen, F. (1831)

La resolució d'equacions de segon grau completant quadrats geomètrics s'ha desenvolupat a partir del text d'al-Khwarizmi, segons l'edició de F. Rosen (1831), en la reedició de (1986), i de les aportacions de Massa (2005) i Guevara (2009a i b). En la figura 2 es reprodueix un d'aquests diagrames.

Aquesta comunicació té com a font principal de referència la meva tesi doctoral defensada el 19 de juny de 2015 que va ser dirigida per Carme Burgués Flamarich. La introducció, els exemples presentats i comentats així com les reflexions finals proven d'aquest ampli període de temps que representa treballar en un recerca didàctica en forma de tesi doctoral.

2. **Descripció de l'activitat**

En aquesta comunicació es presenten dues activitats adreçades a alumnes de 3r d'ESO amb les que a través de raonaments visuals relacionats amb les àrees de quadrats i rectangles, els alumnes resolen problemes que habitualment es resolen utilitzant o bé la fórmula associada al teorema de Pitàgores o bé equacions de segon grau.

2.1. **Resolució de problemes de triangles rectangles amb diagrames de càlcul**

En general, en els problemes sobre triangles rectangles que es resolen aplicant el Teorema de Pitàgores, es planteja una situació en la que es coneixen dos costats d'un triangle rectangle i es demana el tercer. En canvi, en els problemes del capítol 9 dels Nou capítols, la majoria de problemes corresponen a una situació una mica més complicada, des del punt de vista de la relació entre les dades inicials i la demanda de cada problema. Ja que les dades inicials que contenen no es corresponen amb dos dels costats d'un triangle rectangle, sinó només amb un d'ells i la diferència entre els altres dos.

Quan la relació entre les dades conegudes i les demanades en el problema s'expressa en forma de relació algebraica, l'equació que es planteja requereix una certa destresa en la manipulació algebraica per poder ser resolta. Aquesta dificultat és la que es pretén salvar amb la introducció del diagrames, perquè amb ells l'alumne raona de forma visual. Decideix el procés de càlcul a partir de manipular formes geomètriques que provenen d'interpretar geomètricament les fórmules algebraiques que relacionen les dades del problema.

El procés evolutiu de la seqüència de resolució d'un problema amb diagrames de dades i de càlcul consisteix en:
- Construir un diagrama de dades, un triangle rectangle sobre el que s'escriuen les dades conegudes i les que es volen trobar.
- Decidir quin dels tres diagrames de càlcul correspon el problema que es vol resoldre.
- Construir el diagrama de càlcul i escriure-hi les dades que es tenen.
- Transformar aquest primer diagrama en altres diagrames successius, tants com necessiti la persona que resol el problema fins a ser capaç de llegir en el nou diagrama la solució del problema, o gairebé, tenint present que a cada transformació cal reinterpretar algebraicament les dades geomètriques per no perdre de vista la solució que s'està construint amb el raonament geomètric.

La figura següent recull en termes generals la seqüència descrita per a resoldre un problema amb diagrames.

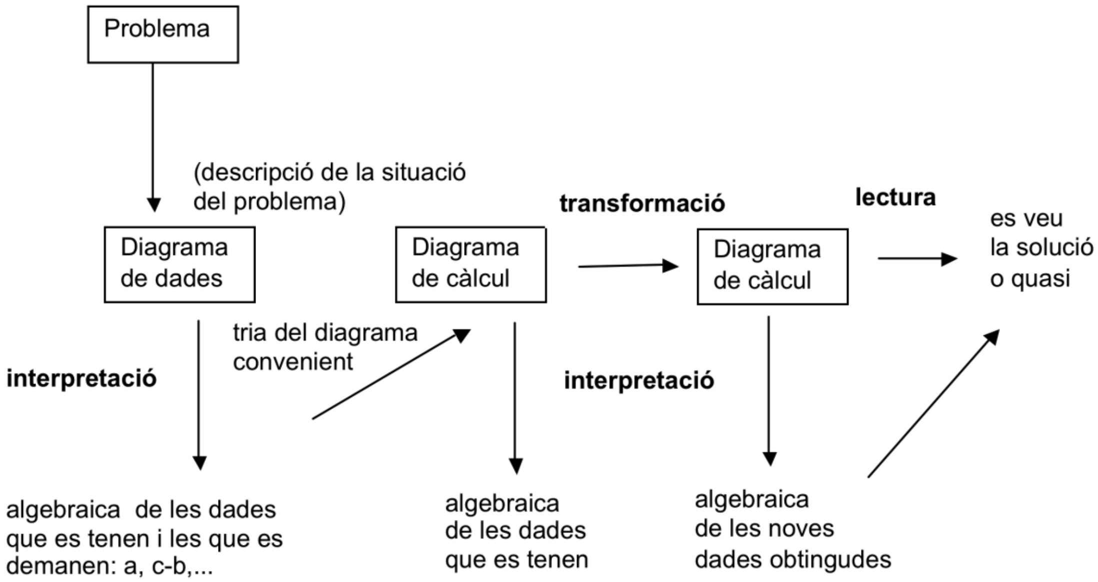


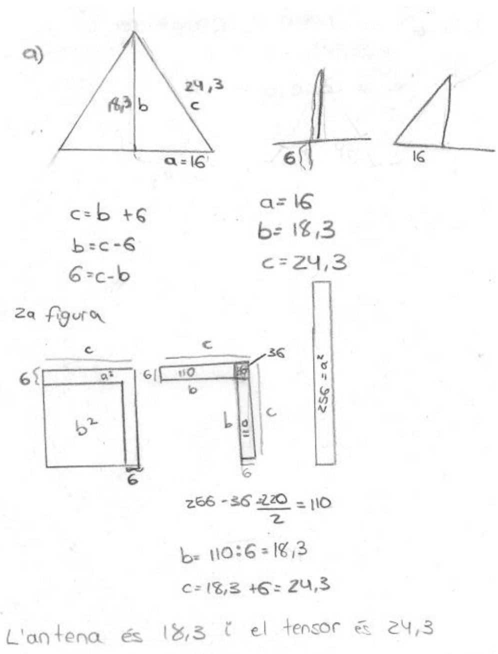
Figura 3: Procés evolutiu de la seqüència de resolució d'un problema amb diagrames

A continuació s'exemplifica el procés amb un problema concret. Primer es planteja l'activitat proposada, especificant l'enunciat i les condicions de treball. Després es recorre el procés seguit per un dels alumnes.

L'enunciat del problema: L'antena
El tensor d'una antena, quan penja des de dalt de l'antena sense tibar-lo, sobrepassa en 6 m l'alçada de l'antena. Tibat, a 16 m de la base de l'antena, arriba just. Quina alçada té l'antena i quina longitud té el cable tensor?

Per a cada problema sobre triangles rectangles es demana als alumnes que segueixin el procediment següent:
1. Localitzeu el triangle rectangle i dibuixar-lo.
2. Escriviu, damunt del dibuix, les dades que teniu i les que us demanen.
3. Decidiu amb quina figura fonamental el resoldreu i expliqueu perquè l'heu triada.
4 Calculeu amb l'ajuda de la figura, utilitzant les mesures de les longitud i les àrees de la figura, les mesures que us demanen.
Un cop resolt el problema, expliqueu també el vostre raonament.

En aquestes condicions, una alumna va resoldre el problema anterior tal com es veu a la figura 4 i va explicar el seu raonament tal com es veu a la figura 5.



a) Primer em trobat el triangle rectangle, com que a l'enunciat diu que el tensor està separat 16 m de la base de l'antena, ens hem adonat que "a" és 16.
Com que el cable sense tibar sobrepasava 6 metres a l'antena. ens em adonat que $c=b+6$, $b=c-6$ i $6=c-b$, tenint això em escollit la figura 2 perquè està relacionada en $c-b$, l'àrea del gnòmon és $a^2=16^2=256$, el costat més petit del gnòmom és 6, llavors per trobar el quadrat que està a dins del gnòmon em fet $6 \cdot 6 = 36$, a 256 li em restat 36 per saber la suma de les àrees dels dos rectangles que sobraven, com que són 2 em fet $256-36 = \frac{220}{2} = 110$ i sabem que cada rectangle té una àrea de 110. Per trobar la b em dividit 110:6 perqué un costat del rectangle és 6 i em de saber l'altre, $110:6 = 18{,}3 = b$, com que $c = b+6$ em sumat $18{,}3 + 6 = 24{,}3 = c$.

$b = 18{,}3$
$c = 24{,}3$

Figura 4: La resolució del problema de l'antena realitzada per una alumna

Figura 5: Les explicacions de la mateixa alumna

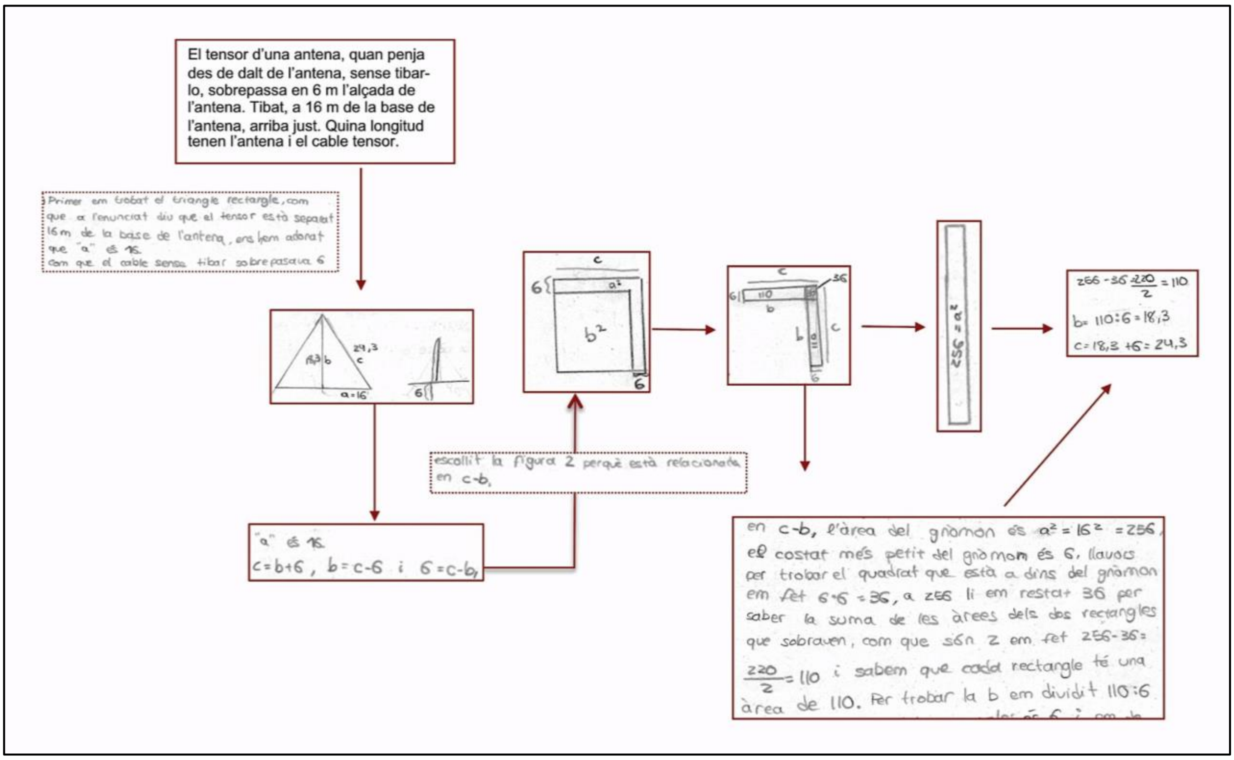


Figura 6: Quadre general del problema de l'antena exemplificat amb la producció d'una alumna

Si s'analitza la producció de l'alumna, d'acord amb el procés general descrit anteriorment en relació a la resolució de problemes amb diagrames de dades i de càlcul de la figura 3, s'obté un esquema com el que es veu a la figura 6.

2.2. Resolució d'equacions completant quadrats geomètrics

Des del punt de vista de la resolució d'equacions de 2n grau, s'aposta per introduir aquest mètode a l'aula abans d'introduir la fórmula (-b±√(b^2-4ac))/2a, que es deixa pel curs següent i així forçar l'alumnat a relacionar les regles del càlcul simbòlic amb les regles geomètriques de transformacions de figures i d'àrees.

Davant de les dificultats dels alumnes a l'hora de manipular i calcular amb termes algebraics, s'opta pel raonament visual i es proposa convertir les equacions en figures geomètriques (quadrats i rectangles). Aquestes figures es manipulen i es transformen. Les transformacions i els canvis repercuteixen en les mesures de les seves longituds i àrees. Es calculen les noves longituds i noves àrees. Són càlculs senzills que no plantegen dificultats als alumnes de 3r d'ESO. Finalment, es reinterpreten les mesures

d'aquestes figures i es dedueix directament la solució de l'equació que és una de les mesures de la darrera figura obtinguda en les transformacions.
Les figures geomètriques que permeten obtenir el resultats dels càlculs algebraics sense fer-los, utilitzant raonaments visuals, són els diagrames de càlcul, segons la nomenclatura introduïda per Mason (i altres, 2005) i també Giardino (2009).

Tant els diagrames successius de la resolució d'equacions de 2n grau completant quadrats geomètrics com les figures fonamentals dels triangles rectangles són dos exemples de l'ús de diagrames de càlcul, per facilitar la resolució d'alguns problemes algebraics característics de l'ESO.

Els dos tipus de resolucions tenen característiques similars. La diferència entre el procediment utilitzat en els problemes sobre triangles rectangles i la resolució d'equacions de segon grau completant quadrats geomètrics és que aquí no hi ha diagrama de dades, directament es passa al primer diagrama de càlcul i a les seves transformacions. Això és així perquè ara l'enunciat del problema és la mateixa equació i a partir d'ella es construeix el diagrama de càlcul. En canvi, en els problemes sobre triangles cal un diagrama de dades per centrar-se en l'enunciat del problema, localitzar les dades, veure quina relació tenen entre elles i poder triar entre tres possibles diagrames de càlcul diferents.

En els problemes de triangles rectangles es parteix de la geometria, les dades són mesures d'un triangle rectangle, s'estableixen relacions algebraiques entre elles i es retorna a la geometria per resoldre'l, a la geometria del diagrama de càlcul.

En els problemes de resolució d'equacions de segon grau completant quadrats es parteix directament de l'àlgebra i es passa a la geometria del diagrama de càlcul per resoldre-les.

A continuació es mostra l'enunciat d'una de les activitats proposades. Primer es presenta l'equació i la demanda de resolució que es realitza als alumnes. Després es presenta una resolució concreta d'un alumne i algunes consideracions específiques.

L'enunciat: Resol les equacions següents, escrivint tots els passos i els valors que vas deduint amb l'ajuda dels diagrames. Comprova després substituint que els teus resultats són correctes.
a) $x^2 + 6x = 40$
b) $x^2 - 6x = 40$

La figura 7 mostra la producció d'una alumna davant d'aquestes peticions.

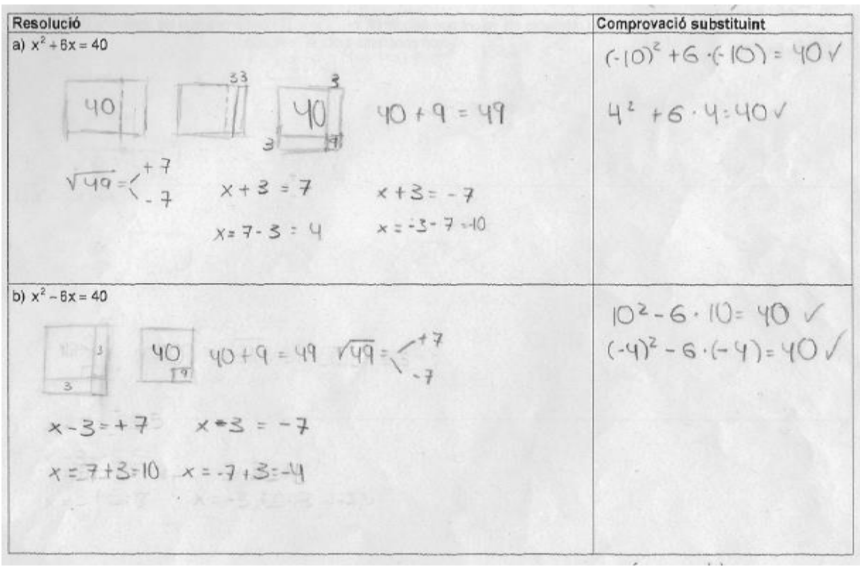


Fig. 7: Resolució de les dues equacions realitzada per una alumna

3. **Reflexió metodològica**

Aquesta manera de plantejar els problemes sobre triangles rectangles i les equacions de 2n grau, promou que els alumnes associïn el llenguatge algebraic i les seves regles de càlcul a transformacions de les àrees de figures geomètriques. S'associen longituds a termes de 1r grau i àrees a termes de 2n grau i fa que els alumnes arribin a un significat més profund del que representen els càlculs algebraics. Connecten l'àlgebra amb la geometria, com de fet va succeir al llarg de la història de les matemàtiques, durant molts segles es resolien amb raonaments geomètrics problemes que avui en dia es plantegen única i exclusivament amb termes algebraics.

4. **Conclusions**

Vistos els resultats recollits en l'anàlisi de les activitats dels alumnes i les conclusions que s'han generat, és pot afirmar que l'ensenyament de l'àlgebra en els primers cursos hauria d'anar de la mà de raonaments visuals com els que faciliten l´ús de diagrames. És a dir, que la introducció de l'àlgebra, a més de ser una generalització de l'aritmètica, un model on les regles amb nombres passen a ser regles amb lletres, hauria de tenir també un component visual, el que dóna la interpretació geomètrica de les fórmules de l'àlgebra. En aquest paradigma les expressions lineals es poden interpretar, en funció de la situació, com a àrees o com a longituds de segments, i les expressions quadràtiques s'interpreten com àrees. Totes les operacions i les regles per realitzar-les tenen la seva interpretació en el model geomètric. D'aquesta manera les propietats de les operacions no es justifiquen únicament amb unes regles o amb una gramàtica dels símbols sinó que tenen un equivalent en el model geomètric. Aquesta idea és va utilitzar en la recerca esmentada (Guevara, 2015) per dissenyar les activitats proposades, partir de problemes que són habituals del currículum escolar i resoldre'ls amb les eines dels matemàtics antics.

Aquesta primera implicació, la d'introduir la interpretació geomètrica en la lectura de les fórmules habituals en els inicis de l'àlgebra, es va posar en pràctica durant el temps de realització de la recerca, dos anys després d'haver recollit les activitats analitzades. El curs 2011-12, l'autora va tornar a impartir classes a grups de 3r d'ESO. En aquesta ocasió a més del dossier de treball sobre la resolució de problemes amb triangles rectangles, es van dedicar 5 o 10 minuts inicials de cada classe a corregir exercicis rutinaris de càlcul amb polinomis que els alumnes havien de resoldre a casa d'una classe a la següent.

Després de dues o tres sessions, diversos alumnes van expressar oralment, per a tota la classe, la coincidència que veien entre els càlculs amb les fórmules i els càlculs amb el suport de les figures geomètriques dient: "Ara ho entenc, aquestes operacions amb lletres són com els càlculs que estem fent amb les figures!". No cal dir que la satisfacció de la professora en aquell moment va ser màxima.

5. Bibliografia

AL-KHWARIZMI (1986) *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Rosen, F. (ed. i trad.), (1a ed., Londres, 1831) Hildesheim/Zürich/Nova York, George Olms Verlag.

ARCAVI, A. (2003). ≪The role of visual representations in the learning of mathematics≫, *Educational Studies in Mathematics* 52, 215–241.

BARWISE, J.; ETCHEMENDY, J. (1996). ≪Visual Information and Valid Reasoning≫. A*:* Allwein, G. i Barwise, J. [eds.], *Logical Reasoning with Diagrams*. New York, Oxford University Press, 3-23.

BURGUÉS, C. (2008). ≪La representación de las idees matemáticas≫. A: HERVÁS-ASENJO, M. M. [coord.], *Competencia matemàtica e interpretación de la realidad.* Madrid, Secretaria General Técnica del MEC, 23-40.

BURGUÉS, C.; SERRAMONA, J. (coord.)(2013) *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic.* Barcelona: Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf (Darrer accés: 31/01/16).

CHEMLA, K.; SHUCHUN, G. [eds.] (2005). *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. París, Dunod [edició crítica bilingüe].

CULLEN, C. (1996). Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing. Cambridge/New York, Cambridge University Press.

DAUBEN, J. W. (2007). ≪Chinese Mathematics≫. A: KATZ, V. J. [ed.], The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook. Princeton, New Jerse, Princeton University Press,187-384.

GIAQUINTO, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics.* Oxford, Oxford Univ. Press.

GIARDINO, V. (2009). ≪Towards a diagrammatic classification≫, *The Knowledge Engineering Review*, 00(0), 1-13.

GUEVARA, I; MASSA, M.R.; ROMERO, F. (2006). "Textos históricos para la enseñanza de las matemáticas". A: PÉREZ-BUSTAMANTE, J.A., *et al.* [coords.], *Actas del IX Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. Cádiz, SEHCYT, 1301-1304.

GUEVARA, I. (2009a). *La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària: La introducció de contextos històrics a l'aula, un recurs per a millorar la competència matemàtica.* http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200809/memories/1864m.pdf (Darrer accés: 31/01/16).

GUEVARA, I.; MASSA, M.R. (2009b). ≪La història de les matemàtiques en els nous currículums de secundària"≫. *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*. Volum 2 (1), 379-390.

GUEVARA, I (2015). *L'ús de contextos històrics a l'aula de matemàtiques de secundària: El cas concret de la visualització en la connexió geometria-àlgebra*. (Tesi doctoral). Universitat de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/301766 (Darrer accés: 31/01/16).

KATZ, V. J.; BARTON, B. (2007). ≪Stages in the history of algebra with implications for teaching≫. *Educational Studies in Mathematics* 66, 185 –201.

MASSA, M.R.(2005). ≪Les equacions de 2n grau al llarg de la història≫. *Biaix*, 24, 4-15.

https://5ffae0819e4690bb429ba787c40104e2d48658f9.googledrive.com/host/0B-nqW6g1Bd5iWXFnOUNtYUhCaVU/biaix24/equacions.pdf (Darrer accés: 31/01/16).

MANCOSU, P. (2005). ≪Visualitzation in Logic and Mathematics≫. A: MANCOSU, P. et al. (eds), *Visualitzacion, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Netherlands, Springer, 13-30.

MASON, J.; GRAHAM, A. & JOHNSTON-WILDER, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*, SAGE Publications.

NISS, M.; HOJGAARD, T. (eds.) (2011) *Competencies and MathematicalLearning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* Roskilde University: Department of Science, Systems and Models, IMFUFA tekst nr. 485. http://diggy.ruc.dk/bitstream/1800/7375/1/IMFUFA_485.pdf (Darrer accés: 31/01/16).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2000) *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Proyecto Sur Industrias Gráficas.