Àlgebra i dependència funcional a l'ESO: una proposta per a pujar el nivell competèncial de tots els alumnes

Manel Sol Puig
Grup Vilatzara (ICE Universitat Autònoma de Barcelona) msol@xtec.cat

Resum de la comunicació

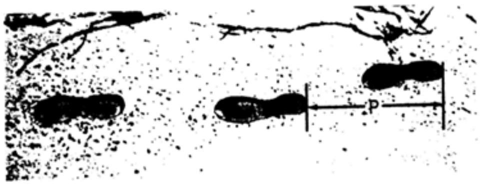
Aquesta comunicació, desenvolupada conjuntament amb Xavier Vilella, forma part del treball que ha desenvolupat el Grup Vilatzara en els darrers anys. Es presentarà un contrastat entre l'enfoc tradicional amb un enfoc reflexiu basat en les relacions i significats del pensament algebraic. Aquest últim segueix un procés de construcció del coneixement que va alternant fases de contxtualització amb fases d'abstracció i estructuració, que presentem a continuació.

Paraules clau: àlgebra, context, relacions.

.

PARAULES CLAU: estadística, significats, contextos

L'enfoc centrat en les normes de manipulació de les expressions algebriques en el millor dels casos aconsegueix que l'alumnat domini les tècniques de manipulació d'expressions però sense comprendre el per què seguim unes normes i no altres. Així podem aconseguir que part de l'alumnat sigui capaç de resoldre llargues llistes d'equacions però siguin incapaços d'aplicar les normes aprenses en situacions diferents d'aquelles en les que han après, ni tan sols identificar les variables en una situació diferent a la treballada en clase. Per exemple, tenim els resultats del problema del caminant a las proves internacionals PISA 2003:



Item alliberat PISA: El caminant

La fotografía mostra les petjades d'un home caminant. La longitud del pas P és la distància entre els extrems posteriors de dos petjades consecutivas.
Per als homes, la fórmula $n/P = 140$ d'óna una relació aproximada entre n i P sent:
n = número de passos per minut
P = longitud del pas en metres
Si s'aplica la fórmula a l'Enric i aquest dóna 70 passos per minut, quina és la longitud del pas de l'Enric? Explica cóm ho calcules.
Aquest problema va ser plantejat a les proves PISA de l'any 2003. Els resultats van ser els següents:

- En el conjunt dels països de la OCDE només ho van resoldre correctamente el 36,3% dels alumnes de 15 anys
- A España: el 38,4%

Suposem que ningú pensarà que a l'ESO no es resolen suficients equacions com per a que l'alumnat no sàpiga resoldre l'equació 70/P = 140, per la qual cosa el problema que se'ns presenta consisteix en que l'alumnat no sap transferir el que ha après en un context a un altre diferent.

Una proposta alternativa

Des de fa uns anys el Grup Vilatzara ve assajant una proposta alternativa que ha mostrat persistentement millors resultats en el desenvolupament de las competències matemàtiques i en l'atenció a la diversitat, tant en el suport a alumnat de baix nivell com en el cultiu de l'excelència, ja que permet als més avançats arribar als nivells corresponents a la connexió i a la reflexió.

Sovint, bona part del profesorat de matemàtiques delega la selecció de continguts i de tasques per a l'aula en el llibre de text de matemàtiques[1]. Aquesta delegació de funcions

[1] A les JAEM de Girona de 2009 vam presentar les tasques per a iniciar l'àlgebra i com introduim el llenguatge simbòlic. En aquests exemples es podía comprovar la manera fins a cert punt natural de resoldre l'equació de primer grau senzilla. També pot consultar-se nostra crítica a la manera d'introduir l'àlgebra de molts libres de text.

presenta conseqüències negatives per a l'èxit de la nostra feina, donat que resulta molt habitual que els llibres de text comencin l'àlgebra presentant-la com una mera generalització de l'aritmètica, donant a entendre que l'àlgebra tan sols és un llenguatge, una mecànica que ha de ser practicada. Aquest és l'anomenat "enfoc sintàctic".

En aquest enfoc, l'ensenyament es centra exclusivament a les normes sense preocupar-se massa en el per què d'elles ni en la comprensió dels significats. En aquestas condicions resulta molt difícil construir el coneixement matemàtic. Encara menys el desenvolupament dels processos matemàtics lligats a les competències matemàtiques com el raonament i prova, la representació, les connexions, la resolució de problemes o la comunicació d'idees matemàtiques. Els primers exercicis que ha d'afrontar l'alumnat consisteix en equacions de primer grau sense cap significat ni context, o bé situacions suposadament contextualitzades completament absurdes, fins i tot algunes d'ellas en las que l'us d'una equació resulta completamente superflu, una complicació sense justificació lògica que ningú faria servir en cap cas.

L'enfoc que presentem parteix d'un context potent i molt proper a l'alumnat, i va avançant per succesives fases de contextualització i estructuració. Exemples d'aquest enfoc es van presentar a les anteriors JAEM d'Albacete i Girona.

El primer context és el de "les pizzes y las amenides". En aquestes tasques inicials conduim a l'alumnat a la resolució d'un sistema de dos equacions amb dos incògnites sense haver parlat en cap moment de la ***x*** i la ***y***.
Dues pizzes i tres amanides costen 19,90 euros. Pots saber quan costen una pizza i dues amanides?

Plantegem una serie de questions que van introduint a l'alumnat en el pensament algebraic:

- *3 pizzes i 6 amanides, quant costen? Per què?*
- *Explica què més puc saber amb aquestes dades.*
- *Raona que 2 pizzes no poden costar 20 euros.*
- *Raona que una amanida no pot costar més de 6 euros.*
- *Escriu 5 possibles preus d'amanides i els corresponents de cada pizza.*

Es posa una segona condició:
Observa que ara el preu de 4 porcions i 6 refrescs és 17,60 euros.

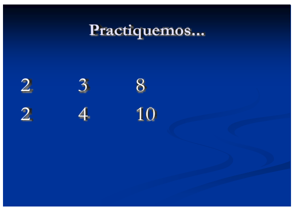
- *Raona per què no puc saber el preu d'una porció i un refresc.*
- *Escriu 5 coses que podem assegurar a partir de la informació donada.*
- *Raona si pots saber el preu de 8 porcions i 12 refrescs.*

A continuació es posa una tercera condició:
Observa que el preu de 3 porcions i 3 refrescs és de 12 euros

- *Raona per què ara puc saber el preu conjunt d'una porció i una refresc, quin és?*
- *Explica per què ara puc saber el preu de 5 porcions i 5 refrescs*
- *Si tenim en compte el preu donat a la tasca anterior de 6 refrescs i 4 porcions, explica com ho fas per saber el preu d'una porció i 3 refrescs.*

- *Pots saber el preu de cada refresc i de cada porció? Si creus que sí calcula-ho.*

Una vegada comprovem que l'alumnat és capaç de resoldre aquest tipus de situacions contextualitzades, fins i tot canviant els contextos, interpretem que reconeix una estructura comú a totes les situacions diferents, se'ls presenta una tasca totalmente descontextualizada, que anomenem "les ternes", en la que bona part de l'alumnat aconsigueix resoldre ***mentalment*** sistemes de dues equacions amb dues incògnites a partir dels dos coeficients de les incògnites i del tèrme independent, col·locats en forma de matriu de 2 per 3 números.



Matriu del sistema

Davant aquesta matriu, l'alumnat interpreta els números en funció de la seva posició i del context en el que han treballat anteriorment i, donat que són equacions senzilles, resolen el sistema mentalment. Se'n adonen de que el primer coeficient és el mateix en els dos casos i que la diferència del resultat ha de provenir de la diferència en el segon coeficient. A classe els alumnes verbalitzen el seu raonament parlant de pizzes i refrescs i considerant el tercer coeficient com el preu a pagar, amb el que es demostra el gran valor didàctic del context treballat anteriormente.

Es presenten diferents matrius d'aquest tipus i es treballen aspectes com l'entrada de coeficients negatius o els falsos sistemes amb equacions equivalents.
A la contextualització següent proposem una tasca basada en la comparació de tarifes telefòniques d'una empresa inexistent que ofereix tres tarifes diferents:

- la primera porta a una funció proporcional,
- la segona a una funció afí
- i la tercera introdueix una funció a trossos, amb un primer tram constant i un segon tram proporcional de pendent més gran que les altres dues tarifes anteriors.

El que es demana es un estudi d'aquestes ofertes, per a decidir a quin perfil d'usuari afavoreix cada una d'elles.

En el context familiar de las tarifes de telèfono mòbil, han d'establir-se les variables i les seves relacions de dependència funcional, passar a representacions diferents, com la tabulació i la representació gràfica, fins i tot la resolució del problema mitjançant diferents estratègias -que es comença generalment per l'assaig-millora, i passa a la resolució gràfica de sistemes-, acabant amb la interpretació dels resultats en tèrmes d'intervals en els que cada tarifa resulta más aventatjosa segons el perfil de l'usuari.

El recorregut parteix del context, del món real, es descriu en termes matemàtics la situació, es resol el problema en el món matemàtic, i s'interpreten els resultats per a tornar al món

real i oferir una solució que funciona.
Cal destacar, en aquesta fase de la seqüència, la integració de la dependència funcional amb l'àlgebra. Per a resoldre la idoneïtat de cada tarifa cal determinar els punts de tall entre les diferents funcions (alguns d'ells gens obvis) i les accions matemàtiques a realitzar incloent la resolució de sistemes de equacions que, necessàriament, incloent aïllaments de la incògnita en equacions de primer grau. Aquest plantejament ja es recull ampliament a les propostes del NCTM, en els seus conegut *Principios y Estándares*.

En aquesta fase de la seqüència, es proposa un canvi de context per a assegurar-nos de que l'alumnat és capaç una altra vegada de identificar l'estructura matemàtica del problema en contextos diferents presentem la tasca "La persecució". En aquesta tasca plantegem l'intent de fuga d'un cotxe de lladres, perseguits per un cotxe de policía, per una autopista que porta cap a la frontera. Inicialment, la situació és análoga a l'anterior, però introduim un tercer cotxe, el de uns gendarmes francesos que, d'acord amb la policía espanyola, inicia la persecució però des de la frontera, i per tant el seu cotxe viatja en sentit contrari al dels lladres i al de la policía espanyola.

Aquesta complicació afegida, lluny de desanimar l'alumnat per la seva complexitat, els desafia i gran part dels alumnes i les alumnes inician un encés debat sobre cóm hem d'afrontar el problema. Les seves discussions són molt interesants pels arguments que esgrimeixen en favor de la seva opinió, o en la crítica a les opinions dels altres.

Aquesta situació acostuma a portar a l'alumnat a una representació gràfica del problema, en la que situar el punt de partida del cotxe dels gendarmes i la seva trajectòria posterior en termes de punts de coordenades resulta el punt més difícil i controvertit de l'activitat que es planteja a l'aula. Els resulta molt difícil d'acceptar que el punt de partida ha d'estar en l'eix de les ordenades, per damunt dels punts de partida dels altres dos cotxes. La seva intuició, equivocadament, els portaria a una representació esquemàtica de la realitat, que els porta a situar-ho a la dreta per representar la seva trajectoria en sentit contrari als altres cotxes.
El fet de que les rectes que apareixen en la representació gràfica del problema no es corresponguin a la imatge real d'un dibuix ens facilita una situació idònia per a la construcció d'aquest aspecte de la representació de funcions que sovint provoca en molts alumnes un error persistent.

El següent pas correspon a una nova estructuració. Es presenten taules de dos columnes que relacionen entre sí parelles de diferents conjunts numèrics i es demana que afegeixin noves parelles. Evidentement, han d'establir el patró que les relaciona si pretenen continuar omplint la taula.

Aquesta es la taula:

2	3
5	0
4	1

a) ¿Sabries omplir aquesta taula amb parelles de nombres que tinguin la mateixa relació que els que ja veus? Afegeix un parell de parelles més.
b) ¿Podries escriure una expresió que representi la relació entre els números de la primera columna i els de la segona?
c) Recordes algún moment en les sessions que hem realitzat fins ara en

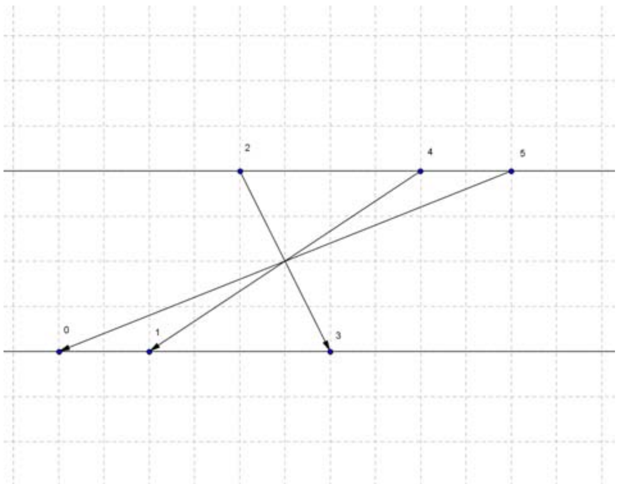
el que aparegués una expressió similar a aquesta? En quin cas apareixeria aquesta expressió?

1	2
2	3
-1	0

a) Sabries omplir aquesta altra taula amb parelles de números que tenguin la mateixa relació que els que ja contenen? Afegeix alguns altres.
b) Podries escriure una expressió que representi la relació entre els números de la primera columna i els de la segona?

Aquesta tasca descontextualitzada constitueix un repte que asumeix la gran majoria de l'alumnat perquè novament pren la forma d'un joc en el que tots poden participar.
La primera taula acostuma a resultar senzilla, aviat descobreixen que la suma és constant i proposen molts possibilitats de parelles per a continuarl-a. Es debat sobre quantes parelles més podem afegir i sorgeix la idea de l'infinit, però no qualsevol parella serveix. Aquesta aparent contradicció permet plantejar a classe que no hi ha contradicció entre un conjunt infinit però selecte d'elements, cosa que per a alguns alumnes és una novetat inesperada.

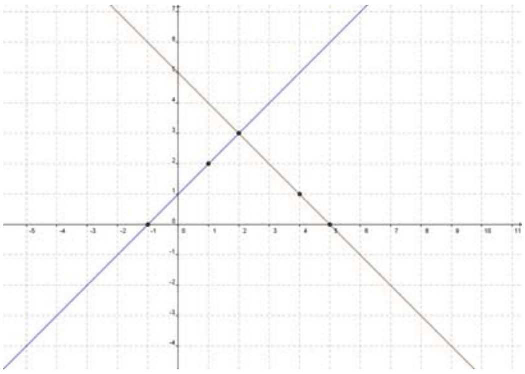
La segona taula és encara més interessant: passats un minuts, presenten propostes per a continuar-la, però la sorpresa apareix quan es demana a cada alumne que expliqui el patró que li ha portat a la seva proposta de parella relacionada: ¡el patró no és el mateix! … i, malgrat tot, tots estan d'acord en que les parelles proposades per tots són acceptables. En aquesta explicació que es busca podem trobar una situació ideal per l'aprenentatge de las expressions equivalents, ja que deseguida alguns alumnes argumenten que, en realitat, tots diuen el mateix, però expressat en formes aparentement diferents. És important que siguin els propis alumnes que arribin a aquesta conclusió, amb el nostre suport si és precís.
Continuant amb aquesta tasca, es demana que representin els valors sobre dues rectes: uns en una recta i els altres a l'altra.



Representació gràfica dels valors

Quan volem relacionar-los, sembla bastant lògic que cadascuna de les rectes sigui diferent en alguna cosa a l'altra i se'ls proposa que les col·loquin en angle recte. Una vegada ho proven, resulta intuïtiu (i fàcil de relacionar amb situacions anteriors de matemàtiques i d'altres assignatures, i fins i tot alguns jocs com a batalla naval) que relacionin les parelles mitjançant la representació de punts en el plà cartesià.

Ara només falta representar les dues relacions, les dues taules en els mateixos eixos, amb el que apareixen dues rectes que es tallen en un punt. És una nova sorpresa per a l'alumnat constatar que les coordenades del punt de tall són les mateixes que l'única parella de nombres coincidents en les dues taules. Entre les infinites parelles relacionades per a cada taula, només una d'elles apareix en ambdues, i resulta ser les coordenades del punt de tall de les dues rectes, de les dues funcions representades.



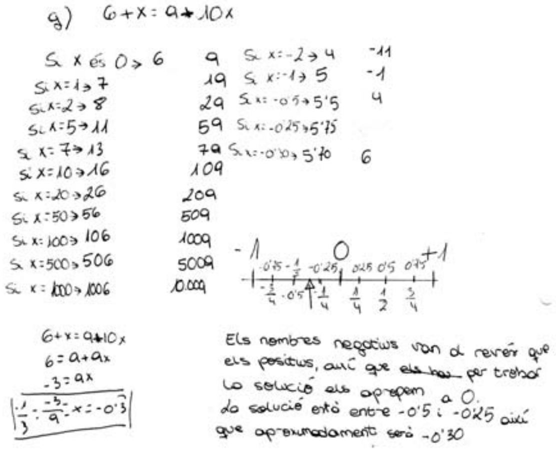
Representació sobre els mateixos eixos

Cal destacar que aquest això que acabem d'explicar podria considerar-se redundant amb la resolució gràfica realitzada en context en el cas de les tarifes telefòniques, però no és així a causa d'una gran diferència: aquí no hi ha context, estem treballant amb representacions simbòliques, tot i que cada estudiant pot imaginar-se la situació que prefereixi si l'ajuda a resoldre la proposta actual.

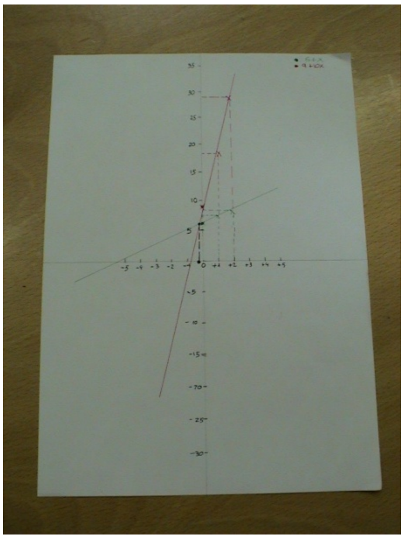
Un pas més en l'estructuració: davant d'una equació determinada, com per exemple $3x+5=2(x-8)$ certament complexa en aquests primers passos en àlgebra (vegeu més endavant) es proposa als alumnes que facin una estimació de valors que de cap manera poden ser la seva solució.

Aviat descobreixen que hi ha un patró que permet definir algunes cotes entre les que no pot trobar-se la solució i d'altres en les que sí hauria de trobar-se la solució.
Una vegada han arribat a aquesta conclusió, se'ls demana que assignin valors a la x i calculin els resultats dels dos membres de l'igualtat. Per tempteig arriben a la solució exacta de l'equació.

Veiem una producció d'una alumna davant l'equació $6 + x = 9 + 10x$



Producció d'una alumna



Aquesta tasca té dues parts ben definides: l'estimació inicial i el descobriment del patró, por una banda, i l'asignació de valors i el càlcul de cada membre de la igualtat, per l'altra. La primera de elles permet la intervenció reflexiva d'alt nivell per l'alumnat més capaç, mentre que la segona pot ser resolta per tot l'alumnat, el que permet que cadascú desenvolupi la seva competència adaptada a la seva manera d'aprendre, a condició de que la primera part no duri massa, cosa que porta irremediablement a la desconexió de la part menys capaç de l'alumnat.

De nou tornem al context. La proposta següent és molt atractiva perquè incluou una sortida del centre per a recollir les dades amb les que anem a treballar en las dos sessions següents: la visita a un poblat íber[2]. La idea prové d'un congrés d'arqueologia en el que constatem de quina manera les matemàtiques, i en concret la dependència funcional, pot ajudar a establir elements del passat a partir de poques dades, poques referències, i poques restes trobades. La base del mètodo emprat és el fet de que totes les cultures que han existit tenen un màxim aproximat d'altura de mur que és una funció de proporcionalitat directa de la seva amplada. És a dir, existex un coeficient més o menys constant que ens permet passar de la mida de l'amplada del mur a l'altura que aquest tindrà.

Així doncs , si el nostre alumnat medeix l'amplada de les restes dels murs d'un poblat íber i pot establir el coeficient per a la cultura íbera en el període d'existència d'aquest poblat, aconsegueix estimar amb certa aproximació l'altura de cada mur mesurat, amb el que podrà reconstruir virtualment cada casa o edifici públic del que quedin restes.
En aquesta tasca es construeix a fons el significat de variable i d'equivalència de expressions. Alhora, es mostra novament una visió de les matemàtiques com eina per a ajudar a d'altres branques de la ciència en la interpretació de la realitat.

Descubrir la raó de proporcionalitat			
Poblat íber	Alçada calculada	Gruix mur	Raó

[2] Veure l'aportació que vam fer a les JAEM d'Albacete l'any 2005

	m	m	proporcionalitat n
Cerro Los Santos	7,40	0,60	
Sant Miquel de Lliria	4,90	0,43	
Ullestret A	7,90	0,65	
Ullestret B	4,72	0,40	

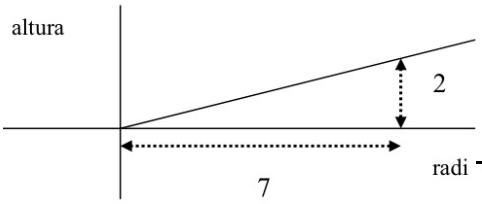
Descobriment de la proporcionalitat

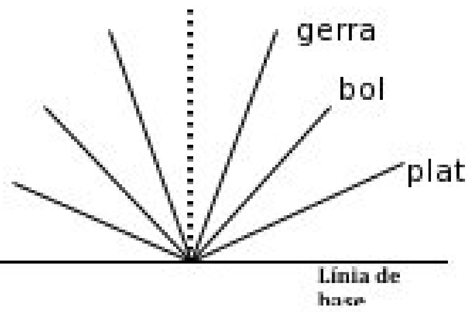
Equivalència d'equacions			
H=E·n		H=n·E	
H=E/n		E=H/n	
H/E=n		E=n/H	

Descobriment de l'equivalència d'expressions

Per arrodonir aquest treball contextualizat, es completa amb un estudi de suposades peces de ceràmica trobades en un jacimient (en realitat, com es pot suposar, no treballem amb peces reals sinò amb trossos de ceràmica actual trencats pel departament de matemàtiques per a aquest fi).
La proposta de tasca és la reconstrucció de la peça sencera a partir de un tros d'ella. Ens centrem en dos aspectes de la reconstrucció:

- donat que la ceràmica acostuma a resultar del treball en un torn més o menys rudimentari, es demana que reconstrueixin la circumferència a partir d'un petit arc d'ella
- les peces antigues més comuns (com la majoría de les actuals) es classifiquen en unes poques categories (plat, bol, olla, gerra). L'arqueologia ha establert que, en la gran majoria de cassos, la relació entre el radi de la peça i l'altura de la base a l'extrem superior serveix per a classificar la peça. Aquesta relació s'expressa amb un número que resulta de dividir l'altura entre el radi: és a dir, ¡ve a ser el pendent! Aquesta és la segona part de la tasca: establir el valor del pendent per a la peça trencada estudiada i classificar-la.





Clau per reconèixer les restes ceràmiques

Per a finalitzar el tema, es proposa a l'alumnat que apliquin tot el que han après en diferents contextos de diferent dificultat: un caminant que controla els seus temps segons la distància que camina, un submarinista que està atent a la presió quan es sumergeix en el mar i ha de controlar els temps de descompressió en el retorn a la superfície, el patró de conversió de graus farenheit, Celsius i kelvin, les variacions de pressió quan un avión va agafant altura, etc.

Conclusions

En la proposta que hem presentat considerem igual d'important el contingut com la metodologia emprada. Ambdues van lligades i tenen sentit si es treballen conjuntament. El context emprat facilita la implicació de l'alumnat en els processos de construcció del coneixement. D'aquesta manera l'alumnat més capaç assoleix reptes complexos i els que no ho són tan en cap moment queden esclosos del procés d'aprenentatge.

Referències bibliogràfiques

Grup Vilatzara (2000) *Matemàtiques i història al Maresme. Íbers i romans.* ICE UAB, Ajuntaments de Mataró i Cabrera de Mar
Grup Vilatzara (2005) *Los íberos las pizzas y los refrescos. El álgebra más allá de las ecuaciones*. XII JAEM Actes pàg 57 58. (Albacete 2005)
Grup Vilatzara(2005) Algebra a l'ESO per tothom. Reinventant a partir del context. *Biaix 24* FEEMCAT Barcelona.
Grup Vilatzara (2006) *Es posible viajar con las matemáticas.* Coeditat per FESPM i ICE UAB Colección matemáticas y entorno núm 1. Badajoz.
Grup Vilatzara (2009) *Algebra sin incognitas? Una introducción competencial al algebra.* XIV Actes JAEM (Girona 2009)
Grup Vilatzara (2009) *Álgebra en contexto*. XIV JAEM (Girona 2009)
Vilella, X. (2007) *Matemáticas para todos* ICE-Horsori. Barcelona