Què fem de proporcionalitat geomètrica a l'escola? Una reflexió sorgida i compartida amb la UdL

Maria Ricart[1], Núria Cardet[2], Assumpta Estrada[3]

[1]Dept. de Matemàtica, Universitat de Lleida, Lleida, maria.ricart@matematica.udl.cat
[2] Escola Joan Maragall, Lleida, mcardet@xtec.cat
[3]Dept. de Matemàtica, Universitat de Lleida, Lleida, aestrada@matematica.udl.cat

Resum de la comunicació

En moltes ocasions l'estudi de la proporcionalitat a les escoles i als instituts queda reduït a la proporcionalitat aritmètica i a l'aplicació del Teorema de Tales. Pensem que la proporcionalitat geomètrica hauria d'adquirir un paper més important a les nostres aules amb activitats significatives que promouen la resolució de problemes i la descoberta de l'entorn, ja que permet adquirir no només coneixements d' espai i forma, sinó també de càlcul i mesura. En l'estudi que es presenta s'analitzen les respostes d'un grup d'estudiants de Primària i d'un grup de futurs mestres a dos problemes que se'ls van plantejar després d'haver treballat les escales a l'escola i a l'aula universitària. Els resultats indiquen que els raonaments són similars. En la comunicació també es detalla la metodologia de treball dels dos grups.

PARAULES CLAU: Proporcionalitat geomètrica, Formació de futurs mestres, Educació Primària

1. Introducció

Els resultats de la Prova d'Avaluació de Quart d'ESO 2015 realitzada a Catalunya van evidenciar que els alumnes, a l'acabar aquesta etapa educativa, tenen carències en coneixements sobre geometria. Aquest fet ens va provocar una primera reflexió que va desembocar en preguntar-nos sobre els continguts curriculars de la proporcionalitat geomètrica, la qual estudia les proporcions entre magnituds d'objectes geomètrics (Quintero, Molavoque i Guacaneme, 2012). Molts d'aquests estudiants es decantaran per estudis de Grau d'Educació Primària i, en un futur, hauran de dur a terme processos d'ensenyament i aprenentatge en què hauran de treballar per desenvolupar el raonament proporcional dels seus alumnes.
La proporcionalitat, que no només és un contingut propi del Cicle Superior d'Educació Primària, sinó també de l'ESO, s'ha de treballar des de cursos inferiors. De fet, ja es fa (una multiplicació també ho és). Segons Fiol i Fortuny (1990) la proporcionalitat connecta i relaciona conceptes i problemes que es treballen des de primària fins a batxillerat: raó i proporció, fracció i nombre racional, canvi d'unitats, escales, mapes i maquetes, problemes d'aplicació de la regla de tres, de repartiments proporcionals, percentatges, gràfiques de funcions lineals, semblança de figures... Però el nom de proporcionalitat costa de sortir a les aules i la majoria de vegades els nostres alumnes només l'associen a la regla de tres, a un algorisme! Per què? Com es treballa la proporcionalitat? Buforn i Fernández (2014) conclouen que molts estudiants de Grau d'Educació Primària, futurs mestres, es troben en un nivell de raonament pre proporcional. Això justificaria que encara ara se segueixi utilitzant l'algorisme de la regla de tres, ja que, encara que no ajudi al desenvolupament del raonament proporcional, els estudiants arriben a respostes correctes (Lamon, 2007).
I la proporcionalitat geomètrica en particular? Com es treballa? Es treballa? Aquesta sí que es limita a l'aplicació del Teorema de Tales i poc més, tot i que té continguts propis en el bloc d'Espai i Forma tant en el Currículum d'Educació Primària com en el de Secundària que van més enllà de Tales.
Arran d'aquestes reflexions es van triar quatre tasques sobre escales perquè les resolguessin tant estudiants de 6^{è} de Primària com estudiants de 2^{n} del Doble Grau d'Educació Infantil i Primària amb l'objectiu de desenvolupar el seu raonament proporcional i identificar semblances i diferències en els raonaments i en les estratègies utilitzades. En aquesta comunicació s'analitzen i es comparen les respostes donades pels dos grups d'estudiants a la tasca inicial i final. Abans, però, s'exposa la metodologia de treball de la proporcionalitat geomètrica utilitzada pels dos grups d'estudiants abans de realitzar-les.

2. Reflexió metodològica: com van treballar la proporcionalitat geomètrica a l'escola? I a l'aula universitària?

Les activitats que presentem a continuació són un model per treballar la proporcionalitat geomètrica d'una manera significativa i contextualitzada a l'escola. També cal dir que aquestes estan relacionades amb els projectes que es treballaven a l'escola dels

estudiants de 6è de Primària dels quals hem analitzat les respostes: "L'escola" a 5è i "El barri" a 6è.
Totes les activitats es feren en petit grup o per parelles tot i que el treball final, informe o comunicació havia de ser individual. També es recollí el treball en murals i en fotografies.
La seqüència d'activitats fou:

- Dibuixar el plànol de l'escola a partir de les mesures preses amb el Google Maps (escala 1:100).
- Mesurar distàncies de mapes llegint les escales.
- Fer tapes de capses a escala. Construcció d'un mural per a veure-hi relacions.
- Ampliar figures quadriculades.
- Mesurar alçades del pati aplicant el Teorema de Tales.

La primera i la segona activitat es van fer a 5è; a 6è es va tornar a treballar la segona i es portaren a terme les altres, de manera que s'havia d'anar recordant i connectant els aprenentatges anteriors (coneixements previs).
El mestre havia d'adoptar el paper d'acompanyant i simular, en la mesura que fos possible, que participava de la descoberta amb l'alumnat. També guià el treball ajudant a organitzar la informació en taules, a quantificar per facilitar les relacions numèriques que hi ha al darrera o al davant de qualsevol situació de proporcionalitat sigui o no geomètrica. Així, a poc a poc, s'anà connectant coneixement, fent xarxa i fou l'objectiu que entenguessin en un sentit més ampli possible els conceptes i procediments que es treballaven per complexos que fossin.

a. "Dibuixem el plànol de l'escola."

Mesurar amb el Google Maps va resultar fàcil, com també anotar les mesures en un esquema de les formes de quadrilàters dels quatre edificis de l'escola. La necessitat de mostrar els valors en figures, el més semblants possibles a la realitat, va fer necessari introduir el concepte d'escala. Els metres reals serien centímetres al paper i així es podria fer-los semblants. Com que les figures a escala mesuraven prop dels 90 cm, es va fer un mural on encabir i situar els edificis tenint en compte l'orientació i posant els noms als carrers limítrofs. Escala 1:100 !
Després, individualment, dibuixaren algun edifici a escala i l'afegiren al portafolis del projecte. Alguns alumnes en volgueren representar a escala 1:200 i descobriren que com més gran era el nombre, la representació era més petita.

b. "Mesurem distàncies amb mapes. Llegim escales."

Aquesta activitat presentava la dificultat de passar de cm a m i a km. També calia ensenyar a mesurar amb el regle (posant-lo bé) la distància entre dos punts i treballar amb decimals fins als dècims. Com que es feia en petit grup i amb el suport de la calculadora, tots van fer bé els càlculs, van comparar distàncies i es van adonar si algun valor no era correcte.

c. "Fem tapes de capses a escala. Construïm un mural."

En una sessió plàstica es van repartir capses de cartró havent-les de reproduir a escala 1:2 per grups. Primer van desmuntar-les i després van mesurar-les i van dividir per 2 la longitud dels costats. En una cartolina van construir la capsa nova**.** Com que l'objectiu era

més plàstic que matemàtic es feu la reflexió de quantes en cabrien sobre la tapa i quantes n'hi cabrien a dins. En la sessió més matemàtica es va partir de la tapa de la mateixa capsa i tots els grups, en folis de colors, van fer les reduccions proposades: 1:2, 1:3 i 1:4. Com que a la classe érem pocs alumnes, cada grup va poder fer més d'una reducció. No mostraven dificultat i era motivador.
Paral·lelament es va preparar el mural que havia d'ajudar a entendre el perquè.
Es va calcar la tapa i es va escriure l'escala 1:1 amb el previ diàleg que va comportar. Després es va calcar la tapa 3 vegades més per poder enganxar les diferents reduccions. Se'ls va demanar que fessin la predicció de quantes en cabria abans de dibuixar i, com era d'esperar, totes foren incorrectes. Certament, mentre enganxaven les reduccions, com es mostra a la figura 1, van anar corregint les prediccions i encertant-les.
S'adonaren que en la reducció 1:2 en cabia 4, en la 1:3 en cabia 9 i en la 1:4 en cabia 16. Sorgiren preguntes com: Pot ser a escala "al revés"? 2:1 Què passaria? Hi cabria al dibuix de la tapa?

Figura 1: Mural de Fem tapes de capses a l'escola.

Per acabar amb aquesta activitat es va preguntar què passaria amb l'escala 1:10. També es va demanar que busquessin a la classe una representació d'aquesta escala i la van trobar: era el metre quadrat amb els dm^2 a dins!

d. "Ampliem figures amb quadrícules."

Aquesta activitat fou individual, encara que el treball final de cerca de regularitats es va fer en gran grup. Volia respondre a la pregunta: Hi ha escales "sense l'1 al davant"?
Es va donar un full quadriculat a cada alumne i se li demanà que en un racó del full dibuixés una figura d'un nombre petit de quadrats(de 10 a 20). Després s'havia d'ampliar 2:1, 3:1, 4:1 fins a 5:1 si els hi cabia al paper. Comptaven els costats dels quadrats del perímetre i els quadrats de la superfície i ho anotaven en una taula. Alguns alumnes van tenir dificultat en comptar el perímetre més que en comptar els quadrats de la superfície. La taula de valors és la clau per adonar-se de les regularitats, de les relacions que hi ha entre els nombres i alhora facilita fer conjectures i generalitzar si es pot.

e. "Mesurem alçades del pati."

Per finalitzar el tema de la proporcionalitat geomètrica calia parlar de Tales. Qui era? Per què fou conegut? Què podem aprendre d'ell?
Es va proposar de mesurar les ombres. Com que canviaven més ràpid del que creien calia algun referent: el metre de la pissarra. Al pati vam posar el regle vertical, es va mesurar l'ombra i al terra en guix van repassar l'ombra i vam escriure les fraccions que representaven les raons. Amb la calculadora es van fer els càlculs i així es va obtenir

l'alçada. Per grups van triar altres elements del pati i van mesurar indirectament amb el teorema la seva alçada.

Els futurs mestres van treballar a partir de l'Espiral del Coneixement de Wells (2004) i en un context d'avaluació formadora perquè "l'avaluació, entesa com autoavaluació i coavaluació, constitueix forçosament el motor d'aprenentatge de tot el procés de construcció del coneixement" (Sanmartí, 2007, p.23). En la primera fase de l'espiral, corresponent a compartir les experiències prèvies dels alumnes sobre el tema, els estudiants de Grau van realitzar un pretest i un mapa conceptual sobre la proporcionalitat. A continuació, es van posar en comú les respostes dels estudiants i es va aprofitar per repassar conceptes de proporcionalitat. A més a més, van fer un exercici d'autoregulació del pretest. Seguidament, en la segona fase de l'espiral, la fase de la "nova informació", van rebre instrucció per part de la seva professora sobre proporcionalitat geomètrica i sobre les escales en particular i també van resoldre en grup 4 tasques sobre escales i semblança de polígons. Aquesta fase va acabar amb un procés de coavaluació intergrupal. La fase 3 de Wells va consistir en una posada en comú que va servir per consolidar els nous aprenentatges; abans de dur-la a terme, els estudiants havien completat una rúbrica d'autoavaluació grupal. L'experiència va acabar amb un postest i un nou mapa conceptual.

A continuació es descriuen i s'analitzen dos de les quatre tasques que van haver de resoldre els dos grups d'estudiants. Pel que fa als futurs mestres, la resolució de la tasca només permet valorar el seu coneixement del contingut comú del coneixement didàctic-matemàtic; per això, es va creure convenient que contestessin un segon ítem en què havien d'identificar els coneixements matemàtics implicats en la resolució de cada tasca. Aquesta segona qüestió ens permet avaluar també el seu coneixement del contingut especialitzat sobre el tema escollit (Godino, 2009).Segons Gonzato, Godino y Nieto (2011) aquesta identificació de coneixements, que poden ser tant procedimentals, com conceptuals, lingüístics o argumentatius contribueix al reconeixement de l'origen dels possibles errors dels alumnes.

a. Tasca inicial:

"En un museu de trens hem llegit la següent informació:

Nom: LOCOMOTORA 269 Escala: 1:90 Material: Metall Longitud: 20 cm Alçada: 4'2 cm

A la realitat, en Pau Gasol, que té una alçada de 2'15 m, pot posar-se dret dins de la locomotora ?"

En aquesta tasca es treballen continguts curriculars de Primària com són l'ús i comprensió de les fraccions per mesurar quantitats contínues en contextos significatius, l'equivalència d'unitats i la lectura i utilització d'escales, a més a més de la competència matemàtica i la competència en el coneixement i la interacció amb el món físic.

En les resolucions es detecten clarament dues estratègies: els estudiants de Primària han utilitzat la multiplicació en el sentit de proporcionalitat entre dues magnituds, mentre que els estudiants del Doble Grau han resolt una equació de proporció, és a dir, han interpretat que si 1 cm a la maqueta representa 90cm a la realitat, es refereix a una raó de la longitud a la maqueta i de la longitud a la realitat, de 1 cm per 90 cm i, per tant, 1 cm és a 90 cm com 4'2 cm és a x cm.

CATEGORIA	ESTUDIANTS 6è PRIMÀRIA	ESTUDIANTS DE 2n GRAU
	Freqüència absoluta (N=20)	Freqüència (G=9)
No justifica.	2	0
Justifica incorrectament i no mostra cap estratègia.	3	0
Presenta una estratègia incorrecta.	2	0
Utilitza correctament la multiplicació.	13	1
Utilitza correctament una equació de proporció.	0	8

Taula 1: Estratègies seguides en la tasca inicial

Respecte als coneixements matemàtics implicats en la resolució de la tasca, algunes de les respostes van ser: factors de conversió, multiplicació, divisió i escala i canvis d'unitats. Només un dels grups va incloure el concepte de fracció!

Aquesta segona part demostra que els futurs mestres han interpretat l'escala com una raó, però no han vist la fracció com una raó. També és sorprenent que no hagin utilitzat els factors de conversió per resoldre la tasca. Ens ha de fer reflexionar sobre la importància que fins ara s'ha donat al càlcul i la necessitat de presentar-los més situacions-problema en què identifiquin un concepte i el seu significat.

b. Tasca final:

"Quina de les escales següents utilitzaries per dibuixar en un full DIN A4 una casa de 7 m d'alçada i 5 m d'amplada?

1:24 1:100 1:10000

Raona la resposta."

Aquesta situació-problema permet avaluar sobretot el nivell d'assoliment de la competència bàsica matemàtica "Donar i comprovar la solució d'un problema d'acord amb les preguntes plantejades" de la dimensió de Resolució de problemes i treballar el raonament espacial, a més a més dels nombres decimals.
Les respostes es van classificar en les següents categories segons el tipus de raonament:

- No es justifica l'escala elegida.
- D'índole qualitativa: relacionen la mida del dibuix amb el número de l'escala que representa els cm de la realitat a què equival 1 cm del dibuix.

- Naturalesa dels nombres i idea d'exactitud: en aquesta categoria hi ha les respostes dels estudiants que utilitzarien l'escala 1:100 perquè les mides de la representació de la casa a escala serien 5 cm x 7cm, nombres naturals. En canvi, si utilitzen l'escala 1:24, 20'8 cm x 29'2 cm.
- Justifiquen la resposta tenint en compte si la representació de la casa els cabrà al full.

CATEGORIA	ESTUDIANTS 6è PRIMÀRIA	ESTUDIANTS DE 2n GRAU
	Freqüència absoluta (N=20)	Freqüència (G=9)
No justifica	5	0
Índole qualitativa	8	0
Naturalesa dels nombres i idea d'exactitud	2	3
Dimensions del DIN A4	2	5
Altres	3	1

Taula 2. Raonaments dels estudiants

Un dels estudiants de Primària que no ha triat cap escala, davall de la pregunta ha fet un dibuix d'una casa tal i com es mostra a la figura 2.

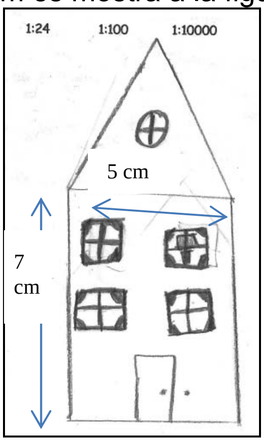
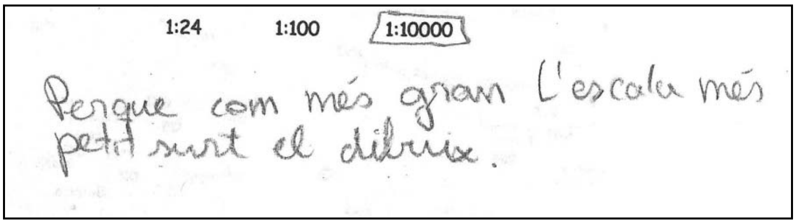


Figura 2: Casa representada parcialment a escala

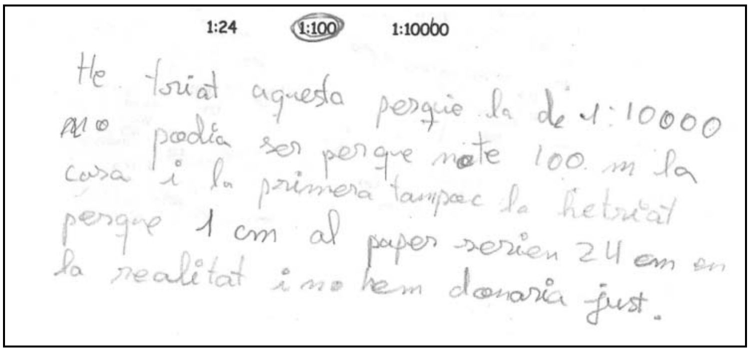
Concretament, el rectangle gran té 7cm d'altura i 5cm de base, la qual cosa fa pensar que el nen ha intentat reproduir la casa a escala 1:100. Els costats del triangle mesuren, aproximadament, també 5 cm. Per tant, aquest nen no ha estat capaç d'elegir una escala i raonar la resposta, però sembla que entén el concepte de escala i sap representar a escala.
Un 33% dels estudiants de Primària presenta la següent justificació incorrecta d'índole qualitativa (figura 3) per raonar que utilitzarien l'escala 1:10000: afirmen que com més gran és l'escala, més petit és el dibuix. Aquest raonament, segurament, prové del descobriment que feren a l'activitat de dibuixar el plànol de l'escola.


1:24 1:100 1:10000

Perque com més gran l'escala més petit surt el dibuix.

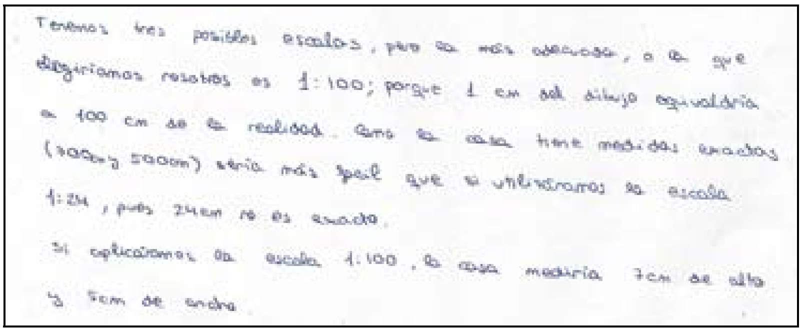
Figura 3. Categoria d'índole qualitativa, justificació incorrecta.

Un altre tipus de raonament que s'observa tant en les evidències dels estudiants de Primària (figura 4) com dels futurs mestres (figura 5) està lligat a la idea de què als estudiants els agrada treballar amb nombres naturals o bé que les divisions siguin exactes. Alguns d'ells han triat l'escala 1: 100 perquè d'aquesta manera cada centímetre del paper representa exactament 100 cm de la realitat; en canvi, si trien l'escala 1:24, han de treballar amb decimals.


1:24 1:100 1:10000

He triat aquesta perquè la de 1:10000 no podia ser perquè nate 100 m la casa i la primera tampoc la hetriat perquè 1 cm al paper serien 24 cm en la realitat i no hem donaria just.

Figura 4: Categoria naturalesa dels nombres i idea d'exactitud. Estudiant de 6è de Primària.


Tenemos tres posibles escalas, pero la más adecuada, o la que elegiríamos nosotros es 1:100; porque 1 cm del dibujo equivaldría a 100 cm de la realidad. Como la casa tiene medidas exactas (700cm y 500cm) sería más fácil que si utilizáramos la escala 1:24, pues 24cm no es exacto.

Si aplicamos la escala 1:100, la casa mediría 7cm de alto y 5cm de ancho.

Figura 5: Categoria naturalesa dels nombres i idea d'exactitud. Estudiants de Grau.

Un altre tipus d'argument que donen tant per justificar l'elecció de l'escala 1:24 com de l'escala 1:100 és que "hi cap al full", però a les respostes no hi inclouen cap càlcul.

En la següent resposta (figura 6) l'estudiant de Primària no només fa un raonament totalment erroni, sinó que també mostra un error conceptual respecte al perímetre: argumenta que l'escala es troba fent el doble del perímetre de la figura real, i a més a més, per trobar el perímetre només suma dos dels costats de la figura. Aquesta suma dóna 12 i justament és la meitat de 24 (1:24). Pensem que aquest raonament té relació amb el fet d'haver mesurat el perímetre en l'activitat d'ampliar figures.

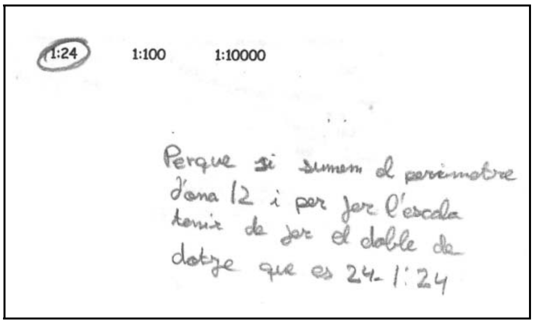


Figura 6: Categoria altres. Errors conceptuals.

Pel que fa al nivell d'assoliment de competència dels estudiants de Primària es pot dividir en dos grups diferenciats: per un costat, s'identifica un conjunt nombrós d'alumnes que han elegit una escala incorrecta o bé que l'escala és correcta, però no fan un raonament correcte. La majoria dels arguments que fan són d'índole qualitativa. El nivell de competència de la resta de nens i nenes és més elevat, ja que donen una solució correcta i una explicació parcialment correcta, tot i que no acompanyen les justificacions amb càlculs. El tipus de raonament que fan seria el de la naturalesa dels nombres i idea d'exactitud o bé el de les dimensions del DIN A4. D'aquest grup també es pot destacar que en la majoria de les respostes es dedueix que alguns dels estudiants han pensat en la possibilitat que hi hagi més d'una resposta correcta, però trien la que els sembla més raonable. No obstant això, s'observa que aquests estudiants entenen el concepte d'escala i saben com calcular les dimensions d'una reproducció feta a escala. Respecte als estudiants de Grau que han triat una possible solució correcta, es detecten bàsicament també dos nivells d'assoliment de la competència: el que correspon a aquells que només han justificat una sola opció i el que correspon als que a les seves respostes argumenten sobre "l'escala més adequada", és a dir, s'intueix també que contemplen més d'una solució correcta, encara que no s'observa explícitament cap discussió respecte a les altres escales. Tot i això, cal destacar la justificació d'un dels grups dels futurs mestres que dóna una resposta no vàlida perquè són els únics que calculen correctament les dimensions de la representació segons les tres escales, però conclouen erròniament a causa de no arrodonir correctament els decimals i no ser acurats en el llenguatge matemàtic.

En les autoregulacions dels errors dels futurs mestres ells mateixos consideren que no haver pensat en la possibilitat de més d'una resposta és conseqüència de la seva falta de comprensió lectora.

Respecte al segon ítem, els futurs mestres van identificar com a coneixements implicats les escales, les proporcions, les unitats de mesura i els canvis de "magnituds" i de "mesures". En aquestes respostes s'identifiquen errors conceptuals que tenen i que poden transmetre en un futur pròxim: confonen magnituds i unitats de mesura.

3. Conclusions finals

La similitud entre els raonaments dels dos tipus d'estudiantat fets en la tasca final, en el cas de la universitat són estudiants de diferents indrets del país, fa reafirmar-nos en la convicció que almenys la proporcionalitat geomètrica s'ha treballat poc a les escoles i als instituts i, en conseqüència, molts dels futurs mestres no tenen desenvolupat ni un bon raonament espacial ni proporcional, essent aquest últim essencial per arribar a desenvolupar el raonament formal (Inhelder i Piaget, 1996). A més a més, queda palesa la dificultat que els suposa treballar amb nombres racionals i veure'ls que són "tant nombres" com els nombres naturals. Aquest raonament mostrat en la tasca final ens ha de fer reflexionar sobre el paper que donem a aquests nombres quan a l'aula plantegem un problema; hem de procurar que tant a Primària com a Secundària els nombres racionals, concretament els que no són enters, vagin sortint i convivint a les aules de la mateixa manera que els naturals. Potser hem de començar per nosaltres mateixos i enlloc de buscar problemes "preparats" en què el resultat sigui "bonic", busquem problemes en què la intencionalitat de treballar el significat d'un concepte sigui més forta que la comoditat d'operar amb tot tipus de nombres. A C. Superior, més concretament a 6è, els nombres racionals han de ser i són l'expressió de gairebé tots els conceptes treballats (proporcionalitat, raons, fraccions, probabilitat, freqüències, %, decimals...). Els alumnes han de veure'ls com una continuació dels naturals i no com una complicació, ja que ens permeten entendre i representar millor la nostra vida.

Així doncs, a l'escola s'han de fer activitats d'una banda més significatives i transversals i, de l'altra, menys algorísmiques pel que fa al treball de la proporcionalitat.

Encara que el nivell competencial dels escolars amb qui hem dut a terme l'experiència no és molt alt, creiem que es deu a què aquests es troben a l'inici del desenvolupament del raonament proporcional i que la proposta didàctica que hem presentat és un bon exemple a seguir per d'altres mestres a les escoles. S'ha de tenir present que el raonament proporcional es comença a treballar a Primària, però és un contingut clau del currículum de Secundària. A més a més, la metodologia seguida a l'escola facilita l'atenció a la diversitat perquè malgrat no arribin a un cert nivell de comprensió del concepte tots poden participar de les activitats i se'n senten part activa. Presentar les activitats a partir d'una bona pregunta, de simular que han de descobrir quelcom per explicar als altres (pot ser als companys de l'altre curs, a la pàgina web o elaborant un petit informe) és una bona manera de motivar i aprendre.

Amb aquest estudi es constata la complexitat del concepte i per això cal una bona seqüenciació que asseguri la configuració cíclica dels continguts. El treball sobre les idees intuïtives és fonamental. Si les tenim en compte a més de buscar contextos significatius, de presentar bones situacions-problema, de treballar en grup, de fomentar el diàleg i les representacions, de donar confiança i donar temps per poder connectar amb el que saben i el que s'aprèn... esperem i de ben segur, que conceptes complexes i tan importants com aquest, s'edificaran sobre una base sòlida i certa.

Pel que fa a l'aplicació de l'espiral de Wells en un context d'avaluació formadora ha enriquit el procés d'ensenyament i aprenentatge, però els estudiants per a mestre no tenen un nivell desitjable en quant a resolució de problemes ni en quant a coneixement del contingut especialitzat sobre la proporcionalitat. Aquest punt ens fa replantejar l'experiència fins al punt d'introduir un canvi en les activitats corresponents a cada fase de l'espiral: pensem que una proposta de millora seria començar la fase de la nova formació per la pregunta que els vam plantejar, enlloc de començar per la instrucció. No obstant això, les rúbriques d'autoavaluació i autoregulació han permès almenys, que els futurs mestres detectin els seus propis errors conceptuals; també s'ha observat que l'avaluació entre iguals ajuda a adquirir coneixement del contingut especialitzat.

4. Bibliografia

Buforn, À., i Fernández, C. Conocimiento de Matemáticas Especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al Razonamiento Proporcional. *Bolema*. 2014, 28,48, 21-41.

Fernández, C., i Llinares, S. Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*. 2012, 30,1, 129-142.

Fiol, M.L., i Fortuny, J.M. *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis, 1990.

Gonzato, Godino i Nieto. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*. 2011,23, 3, 5-37.

Godino, J. Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión*. 2009, 20, 13-31.

Inhelder, B. i Piaget, J. *De la lógica del niño a la lógica del adolecente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatoria formales*. Barcelona: Paidós, 1996.

Lamon, S.J. Rational numbers and proportional reasoning: toward a theorical framework. Altres responsables: F.K.Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* . Charlotte: Information Age Publishing, 2007.

Quintero, A.L., Molavoque, M.J., y Guacaneme, E. A. Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias*. 2012, 16, 75-85.
Sanmartí, N. *10 ideas clave. Evaluar para aprender*. Barcelona: Graó, 2007.

Wells, G. El papel de la actividad en el desarrollo y la educación. *Infancia y Aprendizaje*. 2004, 27,2, 165-187.