

## **L'ensenyament-aprenentatge de les fraccions a educació Primària mitjançant eines TIC i materials manipulables**

**Persona o persones inscrites al Congrés que presenten la comunicació:**

**Mònica Solé<sup>1</sup>, Carme Julià<sup>2</sup>**


<sup>1</sup> Estudiant 4t Grau d'Educació Primària, Universitat Rovira i Virgili, Campus Terres de l'Ebre, monica.sole@estudiants.urv.cat

<sup>2</sup> Dept. d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, carme.julia@urv.cat

### **Resum de la comunicació**

Presentem una proposta per treballar les fraccions a 4t de Primària fent servir materials manipulables i aplicacions interactives per aconseguir un aprenentatge més significatiu d'aquestes. La proposta s'ha dut a terme a una escola i els resultats demostren que els alumnes que han treballat les fraccions utilitzant les TIC i els materials manipulables han assolit millor els objectius plantejats durant les sessions que els alumnes que les han treballat de la forma tradicional de l'escola (seguint exclusivament el llibre de text). Pensem que és important mostrar que es poden treballar unes mateixes nocions de forma més manipulable i motivadora per als alumnes, sobretot, a l'hora de treballar continguts tan complicats com ho són les fraccions a l'educació Primària.

**PARAULES CLAU:** fraccions, eines TIC, materials manipulables

Aquests materials estan sota una llicència CreativeCommons 4.0 Internacional del tipus 

## 1. Descripció

Una característica general de les classes tradicionals de matemàtiques és que es dona molta importància a l'aprenentatge de procediments mecànics, deixant de banda la comprensió de certes nocions, tal i com es comenta a [4]. En aquesta comunicació, ens centrem en les fraccions, un dels continguts més difícils d'aprendre a l'educació Primària. Pensem que en alguns casos els/les mestres no entenen prou bé els conceptes i usos de les fraccions. Aquest fet provoca que aquestes no es treballin de forma significativa a Primària i que es posi èmfasi només als procediments mecànics. En aquests casos, una de les solucions més fàcils és seguir un llibre de text, sense potenciar la manipulació ni, sobretot, l'aplicabilitat de les fraccions. Per contra, existeixen diversos treballs a la literatura on es proposa treballar les fraccions a educació Primària fomentant la creativitat i afavorint el protagonisme dels alumnes. Alguns treballs proposen treballar-les amb materials manipulables (e.g., [7], [11]). D'altres, utilitzen aplicacions interactives per treballar les fraccions (e.g., [12]). La idea és fugir de les classes expositives tradicionals, on el paper de l'alumne és, simplement, de receptor. En aquestes propostes alternatives, l'alumne participa de forma activa en el seu aprenentatge.

Un dels motius que provoquen que les fraccions siguin un dels continguts més difícils a Primària és que aquestes poden prendre diferents sentits. El 1976, Kieren va proposar considerar quatre categories semàntiques diferents per a les fraccions: ràtio, quocient, operador i mesura [6]. Kieren considerava que la noció part-tot està present en cadascuna de les quatre categories anteriors. D'altres autors proposen considerar-la per separat [1]. A [5] i [9], els autors fan un recull de les categories semàntiques que s'han anat proposant a la literatura. Tots aquests treballs evidencien la diversitat de significats i contextos en què es poden aplicar les fraccions.

Un altre punt que cal tenir en compte a l'hora d'ensenyar les fraccions és que, quan se'ls presenten als alumnes, aquests només han treballat amb els nombres naturals i, amb les fraccions, caldrà treballar amb un tipus de nombres diferents: els nombres racionals (o nombres fraccionaris). Molt sovint els estudiants continuen aplicant propietats dels nombres que realment entenen, però que no es donen en aquests nous nombres. Per exemple, en el cas dels nombres fraccionaris, la multiplicació no dona sempre un resultat més gran que els multiplicands i la divisió no sempre dona un nombre més petit com a resultat. A més a més, a diferència dels nombres naturals, hi ha infinits nombres fraccionaris entre dos d'ells (densitat). Cal accentuar que la fracció és un nombre, sense separar excessivament numerador i denominador. Creiem que a l'educació Primària caldria presentar i treballar les fraccions com un nou tipus de nombres i prioritzar la idea de què són els nombres que es necessiten per la mesura.

Una altra dificultat afegida és la representació d'aquests nous nombres. A diferència dels nombres naturals, existeixen infinites formes de representar un nombre fraccionari (fraccions equivalents). És important treballar la representació de les fraccions sobre la recta numèrica. Aquesta ajudarà a entendre que treballem amb un nou tipus de nombres, a veure les equivalències de forma visual i a entendre la fracció com a mesura. Cal relacionar especialment fraccions i decimals. Malauradament, alguns cops es treballen de forma independent.

Per ajudar a entendre millor els nombres fraccionaris, és molt important que els/les mestres utilitzin diferents representacions d'aquestes i també que facilitin que es donin situacions, experiències i contextos diferents a la classe. D'aquesta manera, els alumnes es van familiaritzant amb els diferents significats d'aquests nous nombres, que sovint troben tan estranys i pobres de significat.

Cal tenir en compte que si no s'entenen els nombres fraccionaris i, en conseqüència, no se saben utilitzar de forma correcta, serà molt difícil aprendre àlgebra, geometria i altres aspectes matemàtics més avançats, tal i com es comenta a [3]. A més a més, sense una bona comprensió d'aquests nombres, no es podran atacar certs problemes relacionats amb la vida diària. Són diversos els contextos i situacions reals que impliquen el treball amb nombres fraccionaris, ja sigui en forma de fraccions, decimals, percentatges o que impliquen raonament proporcional. Per tot això, és molt important assimilar bé alguns conceptes i propietats dels nombres fraccionaris des d'un principi, no només els procediments i càlculs mecanitzats.

En aquest treball, es proposa treballar les fraccions mitjançant eines TIC i materials manipulables, fomentant unes matemàtiques més participatives que permetin comprendre i no tant mecanitzar. La proposta es presenta per a 4t de Primària i l'objectiu és que els participants aprenguin alguns continguts corresponents a les fraccions de forma més significativa mitjançant la manipulació d'eines TIC i materials físics que treballant aquests continguts seguint, únicament, un llibre de text. Cal destacar que a més a més d'aprendre millor els continguts, els estudiants de Primària estan, en general, més motivats quan treballen amb aplicacions interactives i materials manipulables que quan assisteixen a una classe tradicional, seguint el llibre de text.

## 2. Reflexió metodològica

Es va dissenyar una unitat didàctica per a 4t de Primària utilitzant materials manipulables i aplicacions interactives que permetessin als alumnes participar de forma activa en el seu procés d'aprenentatge. Es va intentar proposar les activitats tenint en compte contextos propers i situacions de la vida quotidiana dels estudiants.

La unitat didàctica va consistir en 15 sessions d'una hora, 4 de les quals es van dedicar a treballar amb aplicacions interactives i 9 a treballar amb materials manipulables. A més a més, en una de les sessions es va treballar amb materials quotidians que els alumnes van portar de casa. Per exemple, com s'explica més endavant, alguns alumnes van portar fruita que va permetre treballar la idea de fracció com a part-tot. Per mostrar exemples de fracció com a part-tot d'un tot discret, es van plantejar situacions a la classe, de l'estil: tantes nenes del total d'alumnes. Aquesta vivenciació els fa sentir protagonistes i facilita l'aprenentatge dels conceptes. Per altra banda, i amb l'objectiu que els alumnes veiessin la utilitat de les fraccions a la vida diària, en alguna sessió els alumnes van haver de plantejar problemes de fraccions als companys. Normalment, van plantejar problemes contextualitzats en el seu entorn.

L'escola on es va dur a la pràctica la proposta consta de dues línies. Aquest fet va permetre treballar amb un grup experimental (4t B), que va treballar les fraccions

segons la proposta i un grup control (4t A), que va treballar com ho fan habitualment: seguint el llibre de text. El grup experimental i el grup control estaven formats per 16 i 20 alumnes, respectivament. Per avaluar l'aprenentatge del grup experimental i comparar-lo amb el del grup control es van dissenyar dos tests: un d'inicial, que anomenem pre-test, i un de final, post-test (que es va passar després de la intervenció educativa). El grup control va permetre validar l'instrument d'avaluació de la proposta. A l'hora de dissenyar aquests tests, es va treballar de forma conjunta amb el tutor de 4t (que imparteix les matemàtiques a tots dos grups). Així, els tests van preparar-se com es fa de forma habitual a l'assignatura de matemàtiques.

La posada en pràctica de la proposta la va dur a terme la primera autora de la comunicació, tant al grup experimental com al grup control. En el cas del grup control, també es va dissenyar una unitat didàctica, però seguint el llibre de text. Cal remarcar que el grup control va treballar només amb el llibre. Per aconseguir una comparativa justa, tots dos grups van treballar les mateixes nocions: el que va variar va ser la metodologia.

Per decidir les nocions que es treballarien a la unitat didàctica, es va tenir en compte sobretot el llibre de text que utilitzen habitualment a l'escola [10]. Concretament, les nocions que es van treballar durant les sessions, i que corresponen a les preguntes que componen els dos tests, són les següents:

- Noció 1: Nomenar una fracció (numerador = nombre parts que es prenem; denominador = nombre particions que fan el tot).
- Noció 2: Fracció com a part tot d'una unitat contínua.
- Noció 3: Fracció com a part tot d'una unitat discreta.
- Noció 4: Ordenació de fraccions amb mateix denominador.
- Noció 5: Ordenació de fraccions amb diferent denominador (sobre la recta numèrica o amb model d'àrea).
  
- Noció 6: Fraccions equivalents sobre la recta numèrica i usant el model d'àrea (el grup experimental també doblegant paper). Després, de forma aritmètica.
  
- Noció 7: Fracció com a partició d'unitats convencionals de mesura.
- Noció 8: Representació sobre la recta numèrica de fraccions menors que la unitat (cada denominador diferent en una recta diferent).
  
- Noció 9: Suma i resta de fraccions d'igual denominador.
- Noció 10: Fracció com a operador (fraccions menors que la unitat).

Si ens fixem en el llibre de text [10] i el comparem amb en el currículum d'educació Primària [2] i, sobretot, amb el Common Core [8], observem que es treballen fraccions amb gairebé qualsevol denominador, quan a [8] es recomana treballar només amb fraccions del tipus  $n/2$ ,  $n/4$ ,  $n/3$ ,  $n/6$ ,  $n/5$  i  $n/10$ , o equivalents a aquestes durant tota la Primària.

La Figura 1 mostra exemples del material que van portar els alumnes del grup experimental a l'escola per treballar les fraccions. Com s'ha comentat abans, alguns dels alumnes van portar fruita, com mandarines (Figura 1 (a)), pomes, etc. Aquestes

peces de fruita van permetre treballar la fracció com a part d'un tot continu: la meitat d'una poma, un quart de poma, diferents fraccions de mandarina (segons el nombre de trossets que n'agafem), etc. La col·lecció de colors que va portar un dels alumnes (Figura 1 (b)) va permetre treballar la fracció com a part d'un tot discret: fracció de llapis de fusta, fracció de llapis de pasta, fraccions de colors de color blau, etc. Un últim exemple de material quotidià consisteix en un rellotge analògic (Figura 1 (c)), que va permetre treballar la fracció com a partició d'una unitat convencionals de mesura: l'hora, en aquest cas. Es va parlar del quart d'una hora i de la meitat d'una hora (dos quarts).

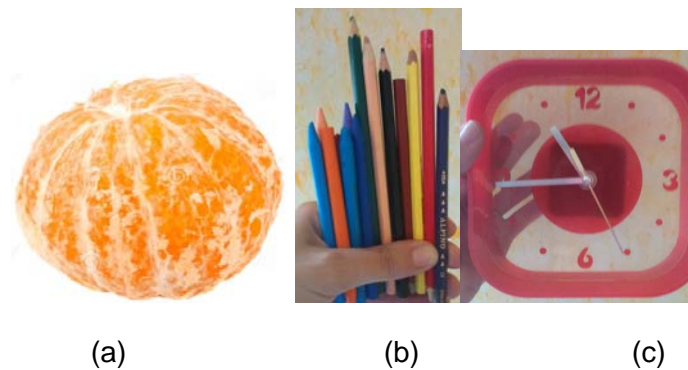


Figura 1: Exemples de material quotidià que els alumnes del grup experimental van portar de casa per treballar les fraccions. (a) Mandarina. (b) Col·lecció de llapis de diferents materials i colors. (c) Rellotge analògic.

Les figures 2 i 3 corresponen a captures de pantalla de dues de les aplicacions interactives que es van treballar en algunes de les sessions del grup experimental. A la primera aplicació (Figura 2) es treballa la relació entre la fracció i la quantitat que representa (nomenar la fracció i entendre bé què representa el numerador i el denominador). Es treballa també la fracció com a part d'un tot continu fent servir diferents models d'àrea (circular i rectangular).

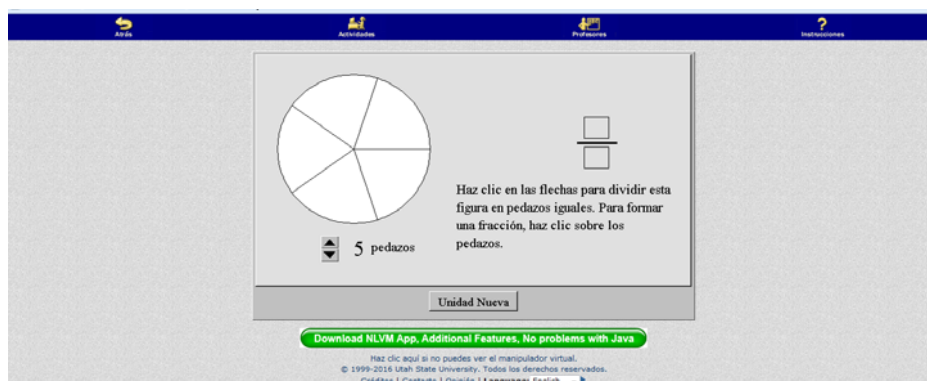


Figura 2: captura de pantalla d'una de les aplicacions interactives treballades ([http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames\\_asid\\_102\\_g\\_2\\_t\\_1.html?from=category\\_g\\_2\\_t\\_1.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_102_g_2_t_1.html?from=category_g_2_t_1.html))

La segona aplicació permet representar les fraccions sobre la recta numèrica, treballar les equivalències, ordenar fraccions i complementar-les fins la unitat (Figura 3).

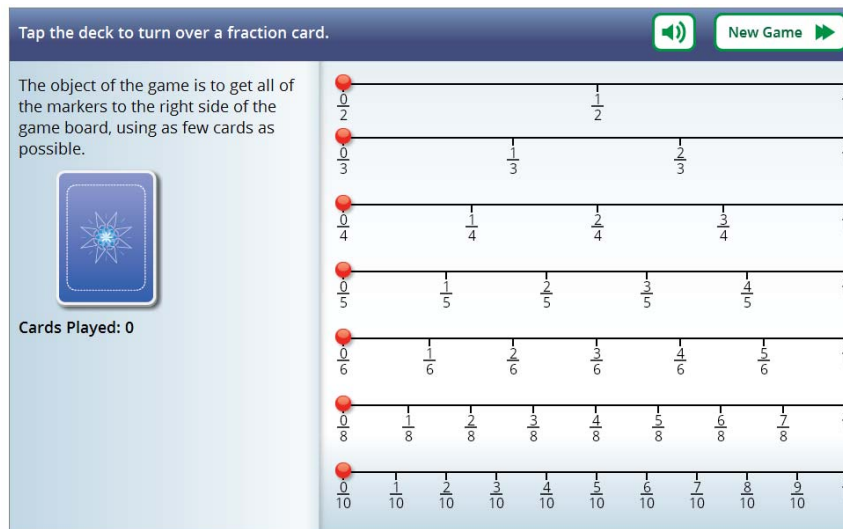


Figura 3: captura de pantalla d'una de les aplicacions interactives treballades (<http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4148>)

Alguns dels materials manipulables que es van treballar durant les sessions es poden veure a les figures 4 i 5. En el primer cas (Figura 4), es van treballar les fraccions equivalents usant el model d'àrea. En el cas de les regletes (Figura 5), es va treballar la noció de fracció com a operador. Per exemple, per trobar  $\frac{3}{4}$  de 36, primer els alumnes van descompondre el 36 en 4 parts. Van observar que es necessitaven 4 regletes de mida 9 per formar el 36. Després, van agafar 3 regletes de 9 i van veure que el resultat donava 27.

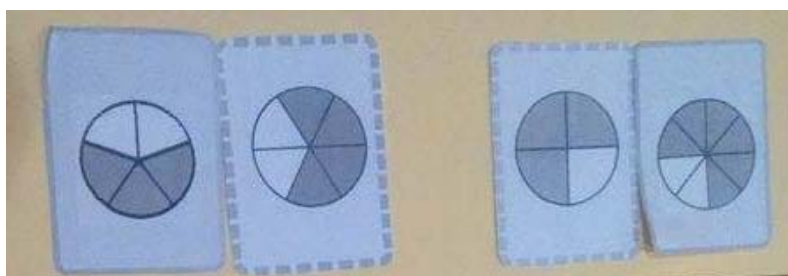


Figura 4: material per treballar fraccions equivalents





Figura 5: alumnes del grup experimental treballant amb les regletes

La Taula 1 conté els resultats obtinguts en el pre- i post-tests per part dels alumnes que pertanyen al grup control (GC) i els que pertanyen al grup experimental (GE). A l'última fila de la taula es mostra la nota mitjana obtinguda a cadascun dels grups en tots dos tests.

GC			GE		
Alumne	Nota pre-test	Nota post-test	Alumne	Nota pre-test	Nota post-test
1	5.5	8.4	1	2.25	9
2	3	5.3	2	4	9.4
3	2.5	7	3	3	9.9
4	1.5	4.8	4	4	10
5	3	3.9	5	1	7.6
6	1.5	4.1	6	2	9.1
7	1.5	3.6	7	1.5	7.1
8	2	6.55	8	5.5	8.05
9	2	3.8	9	1.5	9.6
10	4	6.3	10	1.5	7.4
11	1	8.75	11	1.5	5.1
12	1.5	5.6	12	2.5	9.4
13	1	4.75	13	2	5.6
14	1	1.85	14	1	4.4
15	1	5.3	15	1	6.6
16	4.5	5	16	2.5	6
17	1	6.15			
18	2	6.05			
19	2.5	5.2			
20	3	4.5			
GC			GE		

Mitjana	2.25	5.09	Mitjana	2.29	7.76
---------	------	------	---------	------	------

Taula 1: resultats obtinguts en el pre-test i el post-test, per part del grup control (20 alumnes) i el grup experimental (16 alumnes). Les notes són sobre 10.

Pel que fa als resultats obtinguts al pre-test, podem dir que tant el grup control com el grup experimental, tenien molt pocs coneixements previs sobre les fraccions. La mitjana de la nota obtinguda per tots els alumnes va ser similar en tots dos grups: 2.25 i 2.29 en el grup control i grup experimental, respectivament. Cal destacar que l'única pregunta que van contestat de forma correcta la majoria dels alumnes era la referent a ordenar fraccions d'igual denominador. Aquest contingut és una transferència positiva dels nombres naturals, per tant, és lògic que ho realitzessin correctament. D'altra banda, la meitat dels alumnes van realitzar correctament la suma i resta de fraccions d'igual denominador, un contingut que també és molt semblant amb els nombres naturals. La puntuació obtinguda a la resta de preguntes va ser molt baixa. És interessant remarcar que les qüestions que van respondre millor els estudiants corresponen a procediments (ordenar o operar amb fraccions d'igual denominador). En canvi, les que no van saber respondre impliquen entendre un concepte, que sempre és més difícil que aprendre un determinat procediment.

Com podem observar a la Taula 1, hi ha molta diferència entre els resultats del pre-test i el post-test. Fixant-nos en la mitjana, el grup control va obtenir un valor de 5.09 i el grup experimental un valor de 7.76. Així, es pot afirmar que la millora en aprenentatge de les fraccions va ser més destacable en el grup que va treballat les fraccions amb les aplicacions interactives i material manipulable. A més a més, cal destacar que el 60% dels alumnes del grup control va superar el post-test (12 alumnes dels 20 han superat el 5), mentre que en el cas del grup experimental aquest percentatge puja fins 93.75% (15 alumnes dels 16 han superat el 5).

Les figures 6 i 7 mostren les notes obtingudes en el pre-test i en el post-test, en el cas del grup control i el grup experimental, respectivament. Aquests gràfics lineals permeten comparar la nota inicial i final de cadascun dels alumnes d'una forma més visual que a la Taula 1.



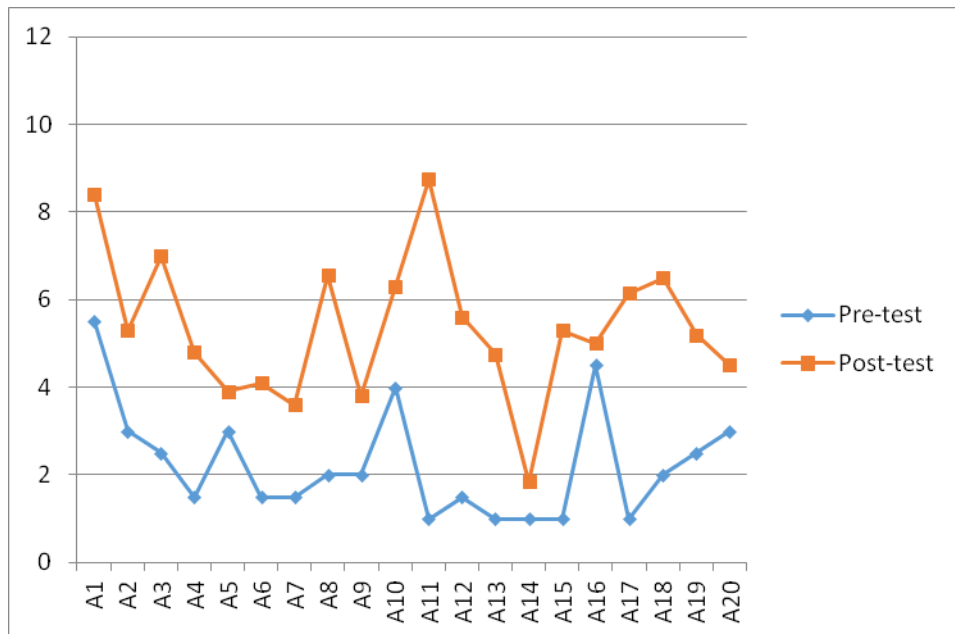


Figura 6: resultats obtinguts en el pre- i post-tests en el cas del grup control.

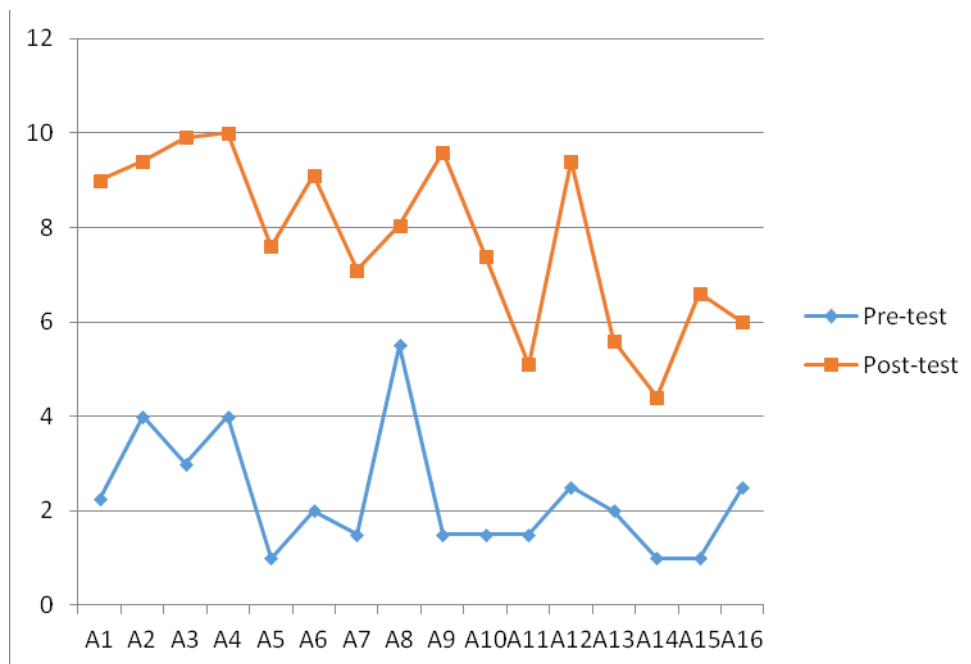


Figura 7: resultats obtinguts en el pre- i post-tests en el cas del grup experimental.

Es pot observar com la diferència de notes entre els dos tests és més destacable en el cas del grup experimental, confirmant que els alumnes d'aquest grup van entendre millor els conceptes i procediments treballats que els alumnes del grup control.

### 3. Conclusions

Aquesta comunicació proposa treballar les fraccions utilitzant aplicacions interactives i materials manipulables a l'educació Primària per a millorar l'ensenyament-aprenentatge d'aquestes.

La proposta es va dur a la pràctica a una classe de 4t de Primària. Els resultats mostren que els estudiants que van participar en el projecte (grup experimental) milloren l'aprenentatge d'alguns continguts de les fraccions de forma més destacable que els estudiants que van treballar els mateixos continguts seguint únicament el llibre de text (grup control).

Els resultats obtinguts permeten defensar un enfocament en l'ensenyament-aprenentatge de les fraccions centrat en la participació dels alumnes i en aconseguir que aquests entenguin els conceptes que se'ls presenten. Un dels objectius d'aquest enfocament és que els alumnes no només sàpiguen operar amb les fraccions, sinó que les comprenguin.

### 4. Bibliografia

- [1] Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R. *Rational numbers concepts*, in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, 1983, eds. R. Lesh and M. Landau (New York, NY: Academic Press), 91-125
- [2] Departament d'Ensenyament. *DECRET 119/2015, de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària*. 2005. ISSN 1988-298X
- [3] Fazio, L., Siegler, R. *Teaching fractions*. International academy of education. Belley, France: Gonnet Imprimeur, 2011. Educational Practices Series-22
- [4] Fosnot, C.T., Dolk, M. *Constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth: Heinemann, 2002. Young mathematicians at work. ISBN-13: 978-0-325-00355-9
- [5] Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., Content, A. A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology. Original Research Article*. 2013, 4, article 715
- [6] Kieren, T.E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers, in *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop, 1976*, ed R. Lesh (Columbus, OG: ERIC/SMEAC), 101-144
- [7] Martin, T., Svihla, V., Petrick Smith, C. The role of physical action in fraction learning. *Journal of Education and Human Development*. 2012, 5,1

- [8] National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: Authors.
- [9] Ni, Y. Semantic domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence. *Contemporary Educational Psychology*. 2001, 26, 400-417
- [10] Ribes, E. *Matemàtiques cicle mitjà*. Esplugues de Llobregat: La Galera, 2013. ISBN: 978-84-412-2122-2
- [11] Yusof, J., Lusin, S. The role of manipulatives in enhancing pupils' understanding on fraction concepts. *International Journal for Infonomics*. 2013, 6, 3-4, 750-755
- [12] Way, J. *Developing fraction sense using digital learning objects*. The Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT) Inc. Adelaide, 2011. Fractions: Teaching of Understanding. ISBN/ISSN: 978-1-875900-68-8