

Trajectòria racional a Primària

Persona o persones inscrites al Congrés que presenten la comunicació:

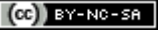
Carme Julià¹

¹ Dept. d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, carme.julia@urv.cat

Resum de la comunicació

Els nombres fraccionaris (o nombres racionals) són un dels continguts més difícils d'aprendre a l'educació Primària. Aquests nombres amplien els enters, però la seva comprensió i manipulació és força més complicada. Un dels motius més destacables d'aquest fet és que els nombres fraccionaris admeten diferents sentits. Una altra possible raó és que un nombre fraccionari es pot representar d'infinites formes (equivalència). A més, el càlcul amb aquests nombres implica nous esquemes conceptuals i nous procediments. Pensem que els mestres haurien d'entendre bé els conceptes i usos de les fraccions, dels nombres decimals i del percentatge. Per això, juntament amb la dra. Luisa Gironde, proposem una trajectòria d'aprenentatge dels nombres fraccionaris a Primària que hauria de servir d'ajuda per la didàctica d'aquests.

PARAULES CLAU: nombres fraccionaris, trajectòria d'ensenyament-aprenentatge.

| |
|---|
| Aquests materials estan sota una llicència Creative Commons 4.0 Internacional del tipus  |
|---|

1. Descripció

Les fraccions són un dels continguts més difícils d'aprendre a l'educació Primària. Un dels motius que provoquen aquest fet és que les fraccions poden prendre diferents sentits. El 1976, Kieren va proposar considerar quatre categories semàntiques diferents per a les fraccions: fracció com a ràtio, fracció com a quocient, fracció com a operador i fracció com a mesura [7]. Kieren considerava que la noció part-tot està present en cadascuna de les quatre categories anteriors. A [5] i [9], els autors fan un recull de les diferents categories semàntiques que s'han anat proposant a la literatura. Tots aquests treballs evidencien la diversitat de significats i contextos en què es poden aplicar les fraccions. Cadascun d'aquests significats es relaciona amb una determinada família de problemes i situacions. Per ajudar a entendre millor les fraccions, és molt important utilitzar diferents representacions d'aquestes i també facilitar que es donin situacions, experiències i contextos diferents a la classe.

Un altre punt que cal tenir en compte a l'hora de treballar amb les fraccions és que, quan es presenten, els alumnes només han treballat amb els nombres enters i, amb les fraccions, caldrà treballar amb un nou tipus de nombres: els nombres fraccionaris (o nombres racionals). En alguns casos, els estudiants continuen aplicant propietats dels nombres que realment entenen, però que no es donen en aquests nous nombres. Per exemple, en el cas dels nombres fraccionaris, la multiplicació no dona sempre un resultat més gran que els multiplicands i la divisió no sempre dona un nombre més petit com a resultat. A més a més, a diferència dels nombres enters, hi ha infinits nombres fraccionaris entre dos d'ells (densitat). Cal accentuar que la fracció és un nombre, sense separar excessivament numerador i denominador. Pensem que a l'educació Primària caldria presentar i treballar les fraccions com un nou tipus de nombres i prioritzar la idea de què són els nombres que es necessiten per la mesura.

Un altra dificultat afegida és la representació d'aquests nous nombres. Donat un mateix nombre fraccionari, existeixen infinites formes de representar-lo (fraccions equivalents). Aquest fet no es donava en el cas dels nombres enters. Cal remarcar la importància de treballar la representació dels nombres fraccionaris sobre la recta numèrica. Aquesta ajudarà a entendre que treballem amb un nou tipus de nombres, a veure les equivalències de forma visual i a entendre la fracció com a mesura. Cal relacionar especialment fraccions i decimals. Malauradament, alguns cops es treballen de forma independent.

Finalment, no s'ha d'oblidar el fet que els/les mestres no sempre entenen bé els conceptes i usos de les fraccions, decimals i percentatges. Això fa que molts cops els nombres fraccionaris no es treballin de manera significativa a Primària.

Tal i com es comenta a [4], una característica general de les classes tradicionals de matemàtiques és que es dona molta importància a l'aprenentatge de procediments mecànics, deixant de banda la comprensió de certes nocions. L'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris hauria d'anar molt més enllà: cal treballar-ne

els diferents sentits i, sobretot, cal entendre'ls com un nou tipus de nombres que es poden aplicar (i s'apliquen!) a la realitat.

Ara bé, caldria decidir què explicar dels nombres fraccionaris a Primària, a quin curs o cicle, amb quin ordre, quins són els punts clau, etc. De vegades, quan es dissenya un currículum se segueix un esquema d'ensenyament-aprenentatge basat en l'acumulació de coneixement de la disciplina, com apunten a [4]. En el cas concret de les matemàtiques, s'analitza l'estructura d'aquestes i es marquen objectius d'ensenyament i d'aprenentatge al llarg d'una línia. Això implica assumir que, quan acaba la classe, tots els alumnes entenen el mateix, de la mateixa forma.

Una forma diferent d'entendre l'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques consisteix en dissenyar trajectòries d'aprenentatge. L'educació matemàtica realista (RME: realistic mathematics education), iniciada per Freudenthal [6], proposa dissenyar el currículum creant unes trajectòries d'aprenentatge hipotètiques. A l'hora de crear aquestes trajectòries, cal fer conjectures sobre possibles camins que se seguiran durant l'aprenentatge. Aquests camins han de tenir com objectiu idees matemàtiques importants i significats específics que es poden usar per organitzar l'aprenentatge al llarg d'aquesta ruta.

Des d'un punt de vista de recerca, en una primera fase, es dissenya una trajectòria hipotètica que consisteix en un conjunt de tasques guiades i que mostren el tipus de raonament i aprenentatge que els estudiants poden experimentar quan participen en aquestes tasques [2]. Aquesta primera trajectòria es va redefinint, segons les observacions que s'obtenen amb la pràctica educativa. L'objectiu és desenvolupar i detallar una descripció general de les trajectòries d'aprenentatge hipotètiques que sorgeixen en classes concretes. Aquestes trajectòries hipotètiques estan formades per grans idees (moments clau), models matemàtics i estratègies que els nens i les nenes construeixen quan estan treballant amb punts clau de les matemàtiques (suma i resta; multiplicació i divisió; fraccions, decimals i percentatges) [4]. La idea és que aquestes trajectòries d'ensenyament-aprenentatge proporcionen als mestres una visió de com es pot realitzar el procés d'aprenentatge (sempre centrat en un context particular) [10].

En aquesta comunicació, presentem una primera trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris, fixant-nos en el Common Core [8], els aprenentatges essencials [1], referències bàsiques de l'educació matemàtica realista (RME), el currículum de Primària 2015 [3] i també basant-nos en la nostra pràctica docent (tant en formació inicial com permanent de mestres). L'objectiu és que la trajectòria serveixi d'ajuda per la didàctica de les fraccions, els decimals i el percentatge a l'educació Primària.

La trajectòria que proposem mostra els moments clau a l'hora d'aprendre els nombres fraccionaris i les discontinuïtats (salts cognitius) que cal anar fent per avançar en la mateixa. La Figura 1 mostra l'esquema de la trajectòria d'aprenentatge racional a Primària que presentarem en detall a l'apartat 2. Per raons de simplicitat, hem considerat tres moments clau, que es podrien correspondre als tres cicles d'educació Primària. A l'eix d'abscisses representem el temps i a l'eix d'ordenades el nivell d'aprenentatge dins la trajectòria.

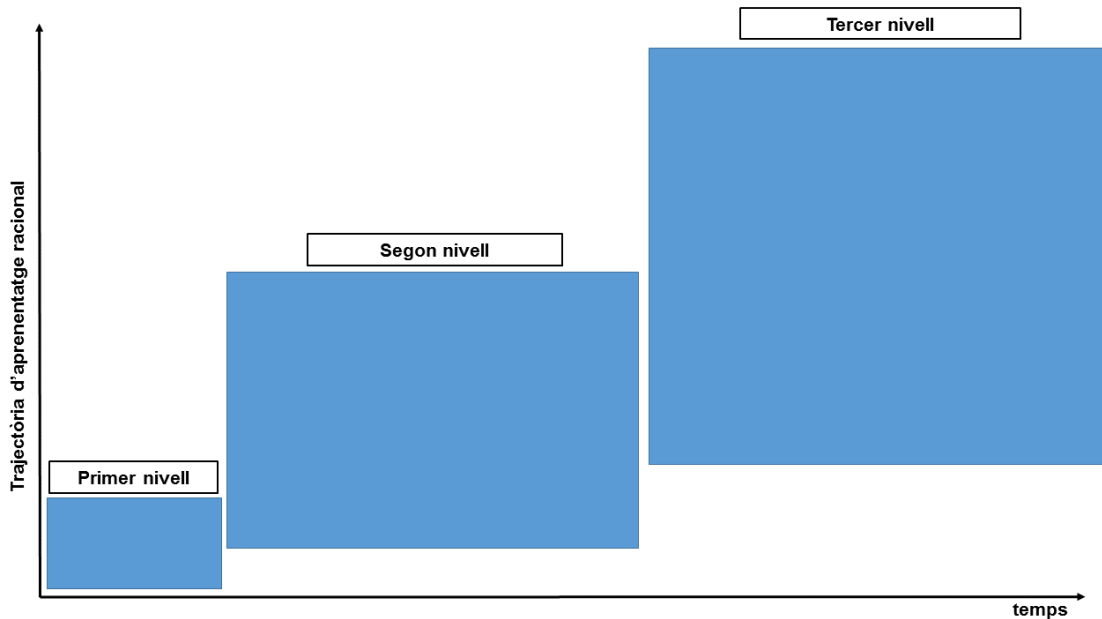


Figura 1: esquema de la trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris a Primària

2. Proposta de trajectòria

En aquest apartat, presentem en detall una primera trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris a Primària. En aquesta trajectòria, es proposa passar d'utilitzar la idea intuïtiva de fracció per nombrar les parts iguals d'un tot continu a utilitzar-la per precisar una mesura i per arribar de manera comprensiva a l'escriptura en forma decimal. A cicle superior s'aprofundirà en l'operatòria amb fraccions i decimals, i en la noció de percentatge. Destacar que s'ha tingut en compte la recomanació del Common Core [8], segons la qual a Primària s'haurien de treballar només fraccions $n/2$, $n/4$, $n/3$, $n/6$, $n/5$ i $n/10$ o equivalents d'aquestes.

La Taula 1 presenta la proposta de trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris. S'ha considerat tres nivells o moments clau, corresponents als tres cicles de Primària, ja que aquesta trajectòria hipotètica està adreçada a mestres de Primària. Per a cada nivell, es detallen les nocions que s'haurien d'aprendre i les accions que es poden dur a terme a cada nivell d'aprenentatge.

| Primer nivell de treball amb nombres fraccionaris: Meitats i Quarts | | |
|---|-------|-------|
| CI | Acció | Noció |

| | | |
|--|--|---|
| | <p>Partició d'un tot continu en meitats i meitats de meitats (quarts): partició d'una poma en dues meitat, partició d'un pastís o d'una pizza en quarts.</p> <p>Assegurar: PARTS IGUALS.</p> <p>Comptar parts amb la nova unitat: tantes meitats, tants quarts. Adonar-se que 6 meitats equivalen a 3 unitats senceres. Tota la hora són 4 quarts d'hora. Amb 2 mitjos kg es fa 1 kg.</p> <p>Assegurar: El TOT o unitat principal és 2 meitats o 4 quarts.</p> | <p>Idea de fracció: Una manera d'anomenar parts d'un tot.</p> <p>Parts d'un tot: meitats i quarts</p> <p>Primera noció d'equivalència: Una meitat igual a dos quarts.</p> <p>La meitat d'un nombre: Sumar les dues meitats i obtenir el nombre. Donat un nombre, calcular la meitat (descomposició en dues parts iguals).</p> |
| <p>Segon nivell de treball amb nombres fraccionaris:</p> <p>a) Particions que no siguin meitats;</p> <p>b) La fracció per precisar una mesura. El nombre mixt i el nombre decimal</p> | | |
| <p>CM (3r)</p> | <p>Acció</p> <p>El triple d'un nombre i la tercera part d'un nombre.</p> <p>Particions d'un tot continu en 3 parts.</p> <p>La fracció unitària per comptar. Fraccions més grans que la unitat.</p> <p>Descomposició en suma de fraccions unitàries ($3/4 = 1/4 + 1/4 + 1/4$).</p> <p>Les meitats i quarts d'unitats convencionals de mesura ($1/2$ quilo, $1/4$ d'hora).</p> <p>La representació de fraccions a la recta. Una recta amb meitats i quarts. Una altra paral·lela amb terços i sisens.</p> <p>La fracció com a operador ($3/4$ de</p> | <p>Noció</p> <p>Notació aritmètica de les fraccions. El nombre que denomina les parts i el nombre que numera (o compta) quantes parts.</p> <p>La fracció unitària.</p> <p>La fracció meitat d'una fracció unitària.</p> <p>Equivalència de fraccions en casos senzills.</p> <p>Fraccions inferiors a la unitat, iguals a la unitat i més grans que la unitat.</p> <p>La fracció com a operador.</p> |

| | | |
|---|---|---|
| | 24). | |
| CM (4t) | Acció | Noció |
| | <p>Particions d'un segment de recta en cinc parts iguals. Els cinquens. Fer meitats de cinquens i obtenir desens.</p> <p>Partir en deu parts iguals un segment de llargada un decímetre. Veure el cm com la dècima part.</p> <p>L'escriptura horitzontal, amb coma, dels dècims.</p> <p>Relacions entre euros i cèntims, metres i centímetres, etc.</p> <p>L'equivalència en la representació a la recta. Recta de quarts, recta de terços i recta decimal.</p> <p>Equivalència i relació entre numerador i denominador (relació entre $1/2 = 5/10 = 3/6$, etc.).</p> <p>Producte de fraccions conegudes mitjançant plegat de paper.</p> <p>Lectura de fraccions en gràfics estadístics (sectors).</p> | <p>Generalitzar la fracció a qualsevol nombre de particions.</p> <p>Noció de dècimes parts.</p> <p>Espectura posicional de les dècimes (ampliació del sistema de numeració decimal).</p> <p>Extensió de la noció de dècima a la noció de centèsima.</p> <p>Operacions bàsiques amb decimals.</p> <p>Equivalència de fraccions en contextos diferents: models d'àrea (plegat de paper), representació a la recta i observació de la relació numèrica entre numerador i denominador.</p> <p>Noció de producte de fraccions (producte de denominadors per trobar la partició producte).</p> <p>Consolidació de la noció parts-tot.</p> |
| <p>Tercer nivell de treball amb nombres fraccionaris:</p> <p>a) Utilització general de nombres amb coma;</p> <p>b) Situacions i càlculs amb fraccions senzilles;</p> <p>c) Fracció com a raó i noció de percentatge</p> | | |
| CS | Acció | Noció |

| | | |
|------------|---|---|
| (5è) | <p>Els nombres decimals (amb coma) i la precisió de la mesura (centèsims i mil·lèsims).</p> <p>Producte de fraccions com a àrea (Justificar regles d'operar amb decimals).</p> <p>La fracció com a quocient entre dos enters (3 pizzes per a 5 nens, o 8 pastissos per a 3 nens).</p> <p>Representar a la recta nombres mixtes (part entera i part fraccionària).</p> <p>Divisió exacta entre dos enters. Escriptura en forma de fracció i en forma de decimal del quocient.</p> <p>Comparar $\frac{5}{6}$ i $\frac{3}{4}$ (no necessàriament buscant denominador comú).</p> <p>Sumar o restar fraccions senzilles ($\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$).</p> <p>La fracció com raó entre dues quantitats discretes: 2 de cada 3 alumnes són nenes.</p> <p>Obtenir fraccions equivalents, també irreductibles (simplificar fraccions).</p> | <p>Extensió del valor posicional de les xifres. Relació amb les unitats de mesura.</p> <p>Justificar operacions amb decimals.</p> <p>La fracció com a quocient.</p> <p>El nombre mixt: part entera i part fraccionària del nombre (en escriptura de fracció o escriptura horitzontal).</p> <p>Fracció decimal (denominador divisor de potència de 10).</p> <p>Comparar fraccions senzilles de denominadors diferents (utilitzant estratègies diverses).</p> <p>Suma i resta de fraccions senzilles en casos de denominadors múltiples un de l'altre.</p> <p>La fracció com a raó entre dues quantitats discretes.</p> <p>Obtenció fraccions equivalents de manera aritmètica (tenir clara la descomposició multiplicativa de numerador i denominador).</p> |
| CS (6è) | Acció | Noció |
| | <p>Suma o resta de fraccions senzilles de diferent denominador. Buscar contextos apropiats.</p> <p>Raó entre dues quantitats discretes: 3 de cada 5 alumnes, 12 de cada 20 i 60 de cada 100.</p> <p>Fracció i percentatge: la quarta part</p> | <p>Fer operatives les nocions de múltiples i divisors.</p> <p>Fracció com a raó i noció de percentatge.</p> <p>Dominar les relacions entre</p> |

| | |
|--|---|
| <p>d'una superfície i el 25%.</p> <p>Càlculs de % en contextos.</p> <p>La fracció i la freqüència relativa.</p> <p>La fracció i la probabilitat.</p> | <p>fraccions senzilles (mitjos, quarts, cinquens i dècims) i els percentatges corresponents.</p> <p>Aplicacions rellevants de l'ús de fraccions i percentatges.</p> |
|--|---|

Taula1: proposta de trajectòria racional a Primària

La Figura 2 mostra la trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris a Primària. S'ha seguit l'esquema de la trajectòria de la Figura 1, però en aquest cas s'han inclòs les nocions que s'haurien d'aprendre en cadascun dels tres nivells.

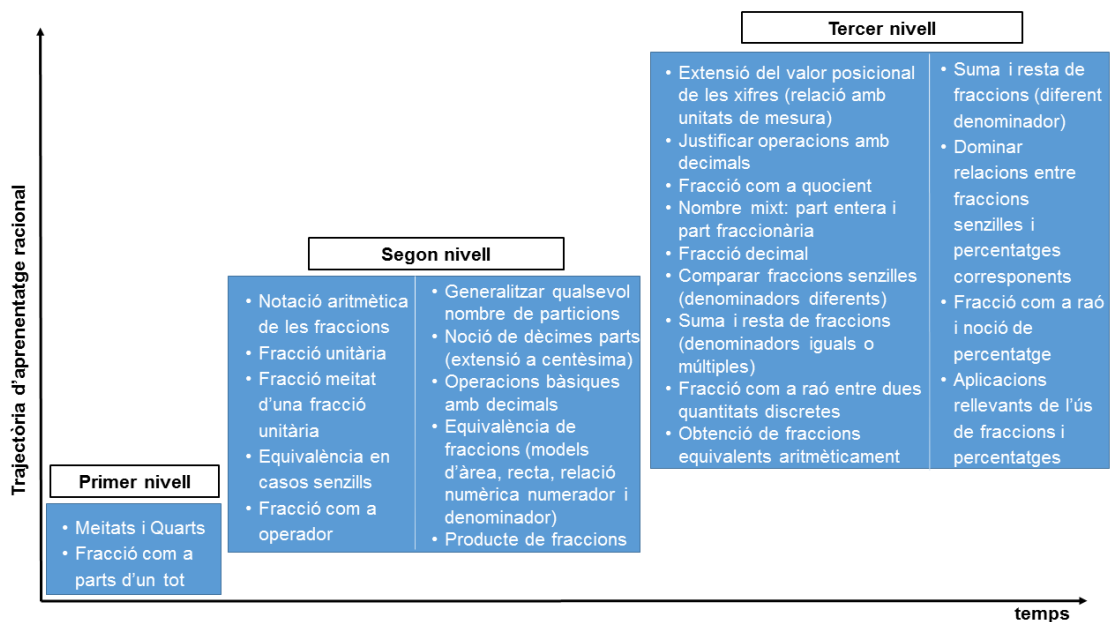


Figura 2: trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris a Primària

Convé ressaltar que en tota trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge hi ha moments que poden representar un salt cognitiu (o discontinuïtat) per als alumnes. Preveiem que els punts que poden representar salts cognitius a la nostra proposta de trajectòria són els que es recullen a la Taula 2.



| | | |
|--------------------|--|--|
| Entre CI-CM | De partir en meitats i quarts | A fer particions en qualsevol nombre de parts (terços, sisens, cinquens i desens) |
| Entre CI-CM | De fraccions per quantificar parts d'una unitat | A utilitzar fraccions per comptar i, per tant, utilitzar fraccions més grans que la unitat i escriure-les en forma de nombre mixt |
| Entre CM-CS | De comparar fraccions amb denominadors iguals | A comparar fraccions amb denominadors múltiples (representació a la mateixa recta) Comparar fraccions buscant partició comú o equivalència (Relacionar-ho amb el mínim múltiple comú dels dos denominadors) |
| CM | De multiplicar enters (4 x 3), disposició rectangular | A multiplicar fraccions ($1/4 \times 1/3$), model d'àrea |
| Entre CM-CS | De comparar, sumar o restar fraccions d'igual denominadors | A comparar, sumar o restar amb denominadors diferents: A) Si es representen sobre la mateixa recta (un denominador múltiple de l'altre); B) Cas de haver de trobar el denominador comú |
| Entre CM-CS | Passar de notació en forma de fracció ($1/5$) | A notació decimal ($2/10 = 0,2$) |
| Entre CM-CS | De la relació part-tot d'un tot discret (8 alumnes de 24 són noies, $8/24$) | A la idea de raó (partició d'un tot discret), 1 de cada 3 alumnes són noies |
| CS | D'utilitzar fraccions senzilles (2 de cada 5) | A expressar-ho en forma de percentatge (40%) |

Taula 2: salts cognitius en el treball dels nombres fraccionaris a Primària

3. Conclusions

Aquesta comunicació presenta una primera trajectòria hipotètica d'ensenyament-aprenentatge dels nombres fraccionaris a l'educació Primària. S'ha intentat assenyalar les nocions que s'haurien d'aprendre i les accions que es poden dur a terme a cada nivell d'aprenentatge. Caldria buscar sempre un context pràctic adient per tal d'involucrar l'alumne en la resolució de situacions significatives per a ell.

A més a més, s'han remarcat aquells moments que previsiblement poden representar un salt cognitiu per als alumnes. L'objectiu de la proposta és que la trajectòria serveixi d'ajuda per la didàctica dels nombres fraccionaris a l'educació Primària.

Com a treball futur, la idea seria anar redefinit la trajectòria d'ensenyament-aprenentatge a partir de la pràctica docent.

4. Bibliografia

- [1] Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., Ross, S., Zbiek, R.M. *Developing Essential Understanding of Rational Numbers for Teaching Mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2010. Series Essential Understanding. ISBN: 978-0-87353-630-1
- [2] Clements, D.H., Sarama, J. Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*. 2004, 6 (2), 81-89
- [3] Departament d'Ensenyament. *DECRET 119/2015, de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària*. 2005. ISSN 1988-298X
- [4] Fosnot, C.T., Dolk, M. *Constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth: Heinemann, 2002. Young mathematicians at work. ISBN-13: 978-0-325-00355-9
- [5] Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., Content, A. A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology. Original Research Article*. 2013, 4, article 715
- [6] Gravemeijer, K., Terwel, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*. 2000, 32 (6), 777-796
- [7] Kieren, T.E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers, in *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop, 1976*, ed R. Lesh (Columbus, OH: ERIC/SMEAC), 101-144
- [8] National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010. *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Authors. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

[9] Ni, Y. Semantic domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence. *Contemporary Educational Psychology*. 2001, 26, 400-417.

[10] Van den Heuvel-Panhuizen, M. Educación matemàtica en los Países Bajos: un recorrido guiado. *Correo del Maestro*. 2008. Núm. 149, 23-54