

“7x3 són 21 però... què vol dir?”

Sònia Esteve Frigola¹, ²Núria Fossas Colet, ³Isabel Sellas Ayats

¹ Dept. de Didàctica de les Arts i de les Ciències, Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya, sonia.esteve@uvic.cat

² Escola Xoriguer, 08540 Centelles, mfossas2@xtec.cat

³ Dept. de Didàctica de les Arts i de les Ciències, Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya, isabel.sellas@uvic.cat

Resum de la comunicació

Sovint en l'ensenyament de la multiplicació es dediquen molts més esforços i temps al coneixement procedimental que no pas al coneixement conceptual. Tenint en compte que aquests coneixements es desenvolupen de forma iterativa i que té més influència el coneixement conceptual sobre el procedimental que no pas a la inversa, es va voler avaluar com 53 alumnes de tercer, quart i cinquè de primària representaven grups iguals, representaven 7x3 i inventaven un problema que es resolgués fent 7x3. S'evidencien dificultats tant a l'hora de proposar una representació per a 7x3, com per a traslladar aquesta representació a un context real. En alguns casos però, el context real ajuda a poder proposar una representació de 7x3.

PARAULES CLAU: multiplicació, coneixement conceptual, suma iterada.

Altres persones autores d'aquest treball:

Helena Domènech Puig Escola Xoriguer, 08540 Centelles, hdomenec@xtec.cat

Joana Aragall Musach Escola Xoriguer, 08540 Centelles, jaragall@xtec.cat

David Costa Medina Escola Xoriguer, 08540 Centelles, dcosta7@xtec.cat

Aquests materials estan sota una llicència
Creative Commons 4.0 Internacional del tipus 

1. Coneixement conceptual i procedimental en l'ensenyament i aprenentatge de l'aritmètica

Hi ha tres tipus de coneixements que interactuen en l'aprenentatge de l'aritmètica (a) els fets numèrics bàsics com ara $2+2=4$, emmagatzemats a la memòria (b) el coneixement procedimental que guia la realització de procediments algorísmics; i (c) el coneixement conceptual, que proporciona un coneixement de les operacions aritmètiques (Delazer, 2003).

Sovint es dediquen moltes hores a desenvolupar el coneixement procedimental (algorismes i mètodes de càlcul) en detriment del coneixement conceptual. Si bé és cert que el desenvolupament del coneixement conceptual per sí sol no condueix a l'adquisició de procediments per a la resolució de problemes aritmètics (Baroody i Ginsburg, 1986). I que aquests procediments aritmètics es poden aprendre i resoldre sense una comprensió conceptual, ja que per aplicar cada pas d'un algorisme amb èxit no es necessita la comprensió dels mateixos (Resnick, 1982); el coneixement conceptual i procedimental interactuen estretament en el rendiment aritmètic dels alumnes (Delazer, 2003).

La comprensió conceptual és necessària per a la fluïdesa de càlcul (no només entesa com a pura rutina de càlcul) i pel raonament matemàtic. Tot i que es pot aconseguir calcular sense comprensió, la comprensió conceptual pot facilitar saber quan es apropiat aplicar un càlcul i és fonamental per a la modificació de la seva aplicació en noves tasques o problemes (Baroody, 2003). També és necessària en la formulació, representació i resolució de problemes (Baroody, 2003; Carpenter, 1986) i en la justificació dels processos realitzats (Baroody, 2003).

Segons Clark i Kamii (1996) els alumnes que tenen problemes de càlcul sempre tenen problemes amb el significat de la multiplicació ja que tenen una comprensió confusa del concepte. I en els casos en que els coneixements dels alumnes es limiten a coneixements procedimentals, aquests tenen una comprensió molt limitada de la multiplicació (Seah i Booker, 2005), i al aplicar procediments sense base conceptual, són més propensos a cometre errors que poden ser sistemàtics (Resnick, 1982).

Les connexions entre el coneixement conceptual i procedimental s'estableixen gradualment i de forma poc sistemàtica (Carpenter, 1986). Aquests coneixements es desenvolupen de forma iterativa, és a dir, una millora en un tipus de coneixement afavoreix la millora de l'altre (Rittle-Johnson, Siegler i Wagener Alibali, 2001). Encara que, el coneixement conceptual té més influència en el coneixement procedimental que no pas a la inversa (Rittle-Johnson i Wagner Alibali, 1999).

Una altra qüestió a tenir en compte en relació a la comprensió és que els nens que entenen les matemàtiques i que per a ells tenen sentit, són més propensos a seguir treballant en un problema o tema i desenvolupar confiança en sí mateixos que no pas els que no (Baroody, 2003).

2. L'adquisició del concepte de multiplicació

Els alumnes han de construir un coneixement sòlid del significat de la multiplicació (coneixement conceptual) i aprendre a raonar multiplicativament ja que aquesta competència serà necessària en l'ensenyament i en l'aprenentatge d'un gran nombre de continguts (Mulligan i Watson, 1998; Otto, Caldwell, Lubinski, i Hancock, 2012).

La multiplicació és significativament més difícil que la suma i la resta ja que és una operació binària amb dos inputs (Anghileri, 2000). En un inici els alumnes haurien de relacionar la multiplicació amb tres aspectes clau: grups d'igual mida (el multiplicand), el nombre de grups (el multiplicador), i el total (el producte) (Mulligan i Watson, 1998; Van de Walle, Karp i Bay-Williams, 2010). Pensar multiplicativament en un problema on hi ha per exemple quatre grups de vuit, requereix que els alumnes pensin en cadascun dels grups de vuit que volen comptar com si fossin elements en si mateixos i alhora pensin que cada grup té vuit objectes. Precisament entendre els grups com a entitats individuals i entendre que alhora cada grup conté un determinat nombre d'objectes és un dels obstacles conceptuals de treballar amb estructures multiplicatives (Clark i Kamii, 1996). En aquest sentit, les activitats on s'hagin de fer i comptar grups, especialment en context, són molt útils (Van de Walle et al., 2010). I en la resolució de problemes en context, les representacions són un element clau en el procés de millora dels coneixements conceptuals i procedimentals (Rittle-Johnson et al., 2001).

De tota manera cal tenir en compte que això no és suficient, i en conseqüència, els mestres han de fomentar el desenvolupament del raonament multiplicatiu més enllà del punt de vista de la multiplicació com a suma iterada (Van de Walle et al. 2010). Usar representacions en files i columnes ajuda a comprendre la multiplicació sobretot als alumnes amb un baix rendiment (Saleh, S., Saleh, F., Rahman i Mohamed, 2010).

Saleh et al. (2010) varen arribar a aquesta conclusió després de realitzar l'estudi amb una mostra de 202 alumnes de segon de primària. En aquest estudi, el 80% dels alumnes no varen ser capaços de respondre les preguntes relacionades amb la multiplicació entesa com una suma iterada, en contrast amb un 72% que sí que varen resoldre satisfactòriament les preguntes on s'havien usat representacions en files i columnes. Un 50% dels alumnes varen ser capaços de respondre correctament a més de la meitat de les preguntes on es demanaven les taules de multiplicar; per tant uns quants alumnes varen respondre correctament tot i no tenir assolida la idea de la multiplicació com a suma iterada. Pel que fa a resoldre situacions multiplicatives de la vida real, només un 8% va ser capaç de resoldre correctament totes les situacions plantejades. També varen adonar-se que l'habilitat de saber-se les taules de multiplicar, no garantia l'habilitat de saber resoldre problemes de la vida real, la qual cosa podria ser deguda a que havien après la multiplicació de forma memorística, sense entendre el concepte.

La representació en files i columnes també és molt útil per a fer càlculs i proporciona un vincle teòric a les propietats de la multiplicació (Barmby, Harries, Higgins i Suggate, 2009).

Però quan sorgeix el raonament multiplicatiu? el raonament multiplicatiu apareix aviat, però sorprenentment es desenvolupa lentament, per tant és apropiat introduir la multiplicació a segon de primària encara que no es pot esperar que tots els alumnes usin raonaments multiplicatius, ni tant sols es pot esperar a 5è (Clark i Kamii, 1996).

Mulligan i Mitchelmore (1997) varen identificar tres models intuïtius per a la multiplicació: comptatge directe, suma iterada i operacions multiplicatives. La suma iterada, sorgeix quan els alumnes desenvolupen estratègies de comptatge més eficients aprofitant que els grups són de la mateixa mida. L'estructura de cada model es deriva de l'anterior i els estudiants no es limiten a canviar d'un model a un altre sinó que desenvolupen un ampli repertori de models que depenen de l'experiència prèvia de la instrucció de situació problemàtica concreta i dels fets numèrics corresponents.

Els problemes on es fan comparacions multiplicatives són relativament difícils pels alumnes i els problemes de combinacions són extremadament difícils. Tot i així, s'usen tots els models intuïtius en tots els tipus de problemes ja que el que permet l'ús d'aquests models és l'estructura de grups iguals i no pas l'estructura semàntica del problema (Mulligan i Mitchelmore, 1997).

3. Mètode

Per tant, tenint en compte la importància del coneixement conceptual i de les representacions, es va voler avaluar com els alumnes de tercer, quart i cinquè de primària de l'escola Xoriguer de Centelles (en total 53 alumnes) relacionaven la multiplicació amb grups iguals, analitzant com eren capaços de fer una representació de grups iguals, com representaven 7×3 i com proposaven problemes que es resolguessin fent 7×3 . Per a poder-ho avaluar se'ls va passar una prova escrita inspirada en Lannin, Chval i Jones (2013). Es va demanar als alumnes que dibuixessin 7 grups de 3, que fessin un dibuix per a representar 7×3 , que diguessin quant és 7×3 i que inventessin un problema que es resolgués fent 7×3 .

4. Resultats

a. Resultats pel que fa a dibuixar 7 grups de 3

Tots els alumnes de cinquè ho resolen correctament. Els alumnes de tercer i quart, en canvi, cometen alguns errors tal i com es pot veure a la taula 1. De fet un 85% dels alumnes dibuixa correctament 7 grups de 3.

	Dibuixa 7 grups de 3	Dibuixa 3 grups de 7	Incorrecte	Ho deixa en blanc	Total
Tercer	17	1	1	2	21
Quart	14	3	1		18
Cinquè	14				14
	45	4	2	2	53

Taula 1. Respostes per cursos a l'activitat "Fes un dibuix amb 7 grups de 3"

b. Resultats pel que fa a representar 7×3

11 alumnes (un 20,7%) fan representacions correctes, 6 (un 11,3%) fan una representació correcta de 3×7 en comptes de 7×3 i 36 (un 68%) fan representacions

incorrectes. A més, el curs on s'usen més representacions diverses (grups iguals, files i columnes i àrea) és a quart.

	Tercer	Quart	Cinquè		
Representa 7 grups amb 3 objectes a cada grup	2	2	3	7	11
Representa 7 grups amb 3 objectes a cada grup i una representació en files i columnes			1	1	
Representa objectes en 7 files i 3 columnes		2		2	
Usa el model d'àrea correctament		1		1	
	2	5	4		
Representa 3 grups amb 7 objectes a cada grup	1		3	4	6
Representa 3 grups amb 7 objectes a cada grup i representa objectes en 7 columnes i 3 files		2		2	
	1	2	3		
Escriu "7x3"	6	3	4	13	36
Escriu "7+7+7=21"	1	1		2	
Escriu "7x3" i "7+7+7=21"	1			1	
Dibuixa 7 objectes usa el símbol "x" i dibuixa 3 objectes	3	5	1	9	
Dibuixa 7 objectes i 3 objectes		1		1	
Dibuixa 21 objectes	2			2	
Escriu els números de l'1 al 21	1			1	
Incorrecte (altres)	2	1	2	5	
En blanc	2			2	
	18	11	7		
Total	21	18	14		

Taula 2. Respostes per cursos a l'activitat "Fes un dibuix per a representar 7x3"

c. Resultats pel que fa a dir quant és 7x3

Només un 10% dels alumnes s'equivoquen, i tots són de tercer curs.

d. Resultats pel que fa al problema plantejat

Haver fet una representació correcta de 7x3 no assegura plantejar adequadament un problema, tal i com es pot veure a les caselles assenyalades de color vermell a la Taula 3. Aquests alumnes plantegen problemes additius excepte un alumne de quart que no planteja cap problema.

Per altra banda, hi ha alumnes que tot i no haver fet una representació correcta de 7x3 sí que plantejaven un problema correcte tal i com es pot veure a les caselles assenyalades de color gris a la Taula 3.

A destacar també que 21 alumnes (un 40% del total), ni saben fer una representació gràfica de 7x3 ni saben proposar un problema que es resolgui fent 7x3, tal i com es pot veure a les caselles assenyalades de color lila a la Taula3.

	Tercer		Quart		Cinquè	
	Problema plantejat correcte	Problema plantejat incorrecte	Problema plantejat correcte	Problema plantejat incorrecte	Problema plantejat correcte	Problema plantejat incorrecte
Representació correcta de 7x3		2	2	3	4	
Representació correcta de 3 x 7		1	2		3	
Representació incorrecta de 7x3	5	13	6	5	4	3
	5	16	10	8	11	3
	21		18		14	

Taula 3. Problema plantejat en funció de la representació feta per a 7x3.

Als casos dels alumnes marcats en gris (un total de 15) a la Taula 3, tot i que no havien fet una representació correcta de 7x3, com que sí que havien plantejat un problema correcte se'ls va donar l'oportunitat de fer una representació del problema plantejat. Després de fer-ho, 12 varen poder fer una representació, encara que en 9 casos varen representar 3x7 en comptes de 7x3.

	Tercer		Quart		Cinquè				
	Problema plantejat correcte	Problema plantejat incorrecte	Problema plantejat correcte	Problema plantejat incorrecte	Problema plantejat correcte	Problema plantejat incorrecte			
Representació correcta de 7x3		2	2	3	4				
Representació correcta de 3 x 7		1	2		3				
Representació incorrecta de 7x3	3	1	1	13	6	5	2	2	3
	5	16	10	8	11	3			
	21		18		14				

	Quan se'ls demana que facin una representació del problema és correcta
	Quan se'ls demana que facin una representació del problema és una representació de 3x7 en comptes de 7x3
	Quan se'ls demana que facin una representació del problema no la fa.

Taula4. Problema plantejat en funció de la representació feta per a 7x3.

El nombre de problemes plantejats incorrectament es redueix curs a curs. A més a més a tercer curs és on més alumnes no proposen cap problema tal i com es pot veure a la Taula 5 i no és fins a cinquè que es redueix el nombre de problemes additius plantejats.

	Tercer	Quart	Cinquè
Planteja un problema additiu	5	4	1
Planteja un càlcul i no un problema	4	4	1
Ho deixa en blanc	7		1
	16	8	3

Taula 5. Raons per les quals els problemes plantejats no són correctes.

5. Conclusions

Els alumnes saben que $7 \times 3 = 21$ i presenten moltes més dificultats per a representar 7×3 que no pas 7 grups de 3 cercles. Per tant la dificultat està en relacionar els grups iguals amb la multiplicació.

D'acord amb Clark i Kamii (1996) no tots els alumnes de cinquè usen raonaments multiplicatius.

S'evidencia la dificultat de traslladar a contextos reals els coneixements que els alumnes tenen sobre la multiplicació, ja que encara que els alumnes sàpiguen fer una representació de 7×3 , no és fins a cinquè on tots els alumnes amb aquesta habilitat són capaços de proposar un problema correcte.

Per alguns alumnes pensar una representació en un context, tal i com recomana Van de Walle et al. (2010) va ser determinant a l'hora de fer una representació ja que sense context no n'havien estat capaços.

6. Implicacions educatives

Com que els alumnes tenen una idea clara del que són els grups iguals, en un inici cal deixar que resolguin els problemes a la seva manera, és a dir, usant una suma iterada. Caldrà ajudar-los però, a avançar cap al pensament multiplicatiu animant als alumnes a usar estratègies més eficients com ara pensar en la manera més ràpida de resoldre el problema escrivint el menys possible (Kamii i Clark, 2014). Amb aquesta mateixa finalitat, també cal fomentar que els alumnes comparteixin i comparin diferents estratègies de resolució per a un mateix problema (Clark i Kamii, 1996).

Caldrà incloure a la seqüència didàctica per als alumnes de tercer problemes de multiplicació usant files i columnes, emfatitzant la naturalesa binària de la multiplicació (Saleh et al., 2010) i les seves propietats (Barmby et al., 2008).

Cal reforçar el coneixement conceptual dels alumnes necessari en la formulació, representació i resolució de problemes (Baroody, 2003; Carpenter, 1986).

7. Bibliografia

- Anghileri, J. *Teaching number sense*. London: Continuum, 2000.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*. 2009, 70, p. 217-241.
- Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates, 1986, p. 75–112.
- Baroody, A. The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: the Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. Dins A.J. Baroody, A. Dowker (eds.) *The development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2003, p. 384-407.
- Carpenter, T. P. Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. Dins Hiebert, J. (ed.) *Conceptual procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986, p. 113–132.
- Clark, F.B. & Kamii, C. Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grade 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1996, vo. 27, núm. 1, p. 41-51.
- Delazer, M. Neuropsychological findings on conceptual knowledge of arithmetic. Dins A.J. Baroody, A. Dowker (eds.) *The development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise*. Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates, 2003, p. 384-407.
- Kamii, C., & Clark, F.B. (2014). [en línia] Multiplication is Different from Repeated Addition. Disponible a:
<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxjb25zdGFuY2VrYW1paXxneDo1ZGNiZGM5NDIkdjYxMDgy>
- Lannin, J., Chval, K., & Jones, D. *Putting Essential Understanding of Multiplication and Division into Practice*. 3-5. Reston, USA: National Council of Teachers of Mathematics, 2013.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M.C. Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1997, Vol. 28, núm. 3, p. 309-330.
- Mulligan, J., & Watson, J. A Developmental Multimodal Model for Multiplication and Division. *Mathematics Education Research Journal*. 1998, vol. 10, núm. 2, p. 61-86.
- Otto, A., Caldwell, J., Lubinski, C. A., & Hancock, S. W. *Developing Essential Understanding of Multiplication and Division. Grades 3-5*. Reston, USA: National Council of Teachers of Mathematics, 2012.
- Resnick, L. B. Syntax and semantics in learning to subtract. Dins Carpenter, T. P., Moser, J. M. & Romberg T. (eds.) *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates, 1982, p. 136–155.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Wagner Alibali, M. Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*. 2001, vol. 93, núm. 2, p. 346-362.
- Rittle-Johnson, B., & Wagner Alibali, M. Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*. 1999, vol. 91, núm. 1, p. 175-189.
- Saleh, S., Saleh, F., Rahman, S.A., & Mohamed, A.R. Diagnosing Year Two Pupils' Misunderstanding of Multiplication Concepts at Selected Schools in Sabah. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 2010, vol. 8, p. 114-120.

Seah, T.K.R. & Booker, G. [online]. Conference publication: Lack of Numeration and Multiplication Conceptual Knowledge in Middle School Students: A Barrier to the Development of High School Mathematics?, 2005. [Consultat: 15 de maig de 2016]
Disponible a:

<http://www98.griffith.edu.au/dspace/bitstream/10072/2510/1/29772.pdf>

Van de Walle, J., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. USA: Pearson Education, 2010.