Traient suc d'un tetràedre
(Què hauríem fet amb el GeoGebra l'any 1983?)

Persona inscrita al Congrés que presenta el taller:

Antoni Gomà Nasarre

[1] Professor jubilat d'Ensenyament Secundari. Associació Catalana de GeoGebra.
agoma@xtec.cat

Resum del taller

Al llarg d'aquest taller es proposa resseguir el contingut del treball de recerca *Traient suc d'un tetràedre (Estudi dels punts notables del tetràedre)* que Joan Bertomeu, Lluís Borràs, Lluís Caballol, Maria Gas de Cid i Àngels Miralles, alumnes de l'Institut de Tortosa van fer l'any 1983 (premi CIRIT). El treball aporta idees innovadores sobre la geometria del tetràedre i es farà una reflexió sobre els recursos informàtics actuals i els de fa 33 anys, es revisaran aspectes conceptuals de la geometria sintètica i, paral·lelament, se'n donarà una visió actualitzada amb el GeoGebra 3D i algunes pinzellades amb el CAS. Aquest serà l'aspecte manipulatiu principal per als assistents al taller. Es farà un estudi dels punts notables més coneguts (baricentre, circumcentre, incentre), es caracteritzaran els tetràedres ortocèntrics i es presentarà el filcentre i s'estudiarà quan existeix.

PARAULES CLAU: GeoGebra 3D; Geometria euclidiana; Geometria analítica.

1. Descripció del taller

Un dels millors records de l'etapa docent de la persona que redacta aquest document va ser poder dirigir un treball de recerca, *Traient suc d'un tetràedre (Estudi dels punts notables del tetràedre)*, elaborat per cinc alumnes de COU de l'Institut de Tortosa [3]. El treball va ser premiat en la convocatòria 1983 dels *Premis CIRIT* (actualment *Premis de Recerca Jove*, que convoca anualment el Govern de la Generalitat de Catalunya).

A partir d'exercicis i problemes treballats a classe anaven sorgint preguntes geomètriques o conceptuals i buscaven les respostes.
- Sabem trobar el baricentre d'un tetràedre? Sí!, sumem i dividim per 4.
- Els tetràedres, tenen tots circumcentre? Sí! ho podem raonar "fàcilment" (sic)
- Les altures d'un tetràedre es tallen sempre per definir l'ortocentre? No! hem d'estudiar quan...i jo afegeixo: i ho van descobrir!!!
- Els tetràedres, tenen tots incentre, el centre d'una esfera inscrita? Sí. També ho van raonar.
- Durant el debat de l'incentre se'ls va acudir un punt que en van dir filcentre ("com si l'esfera fos de filferro") a veure si existia una esfera tangent a totes les arestes. No sempre existeix; en el treball van caracteritzar els tetràedres amb aquesta propietat.

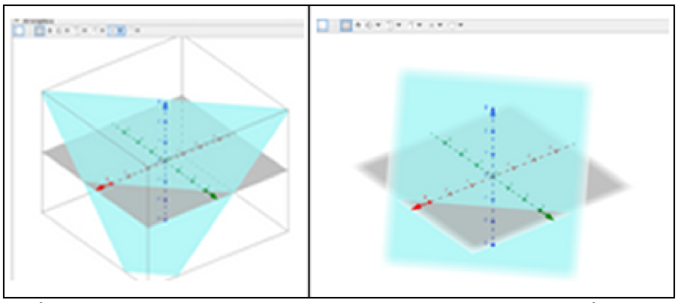
Però el cas és que per aprofundir l'estudi van aprendre el llenguatge de programació BASIC i van fer un programa per calcular tots els punts, alhora que decidien si existien o no l'ortocentre o el filcentre. Un primer aspecte a tenir en compte en el taller seran unes reflexions històriques sobre l'ús de les eines informàtiques. La primera reflexió és que tot s'ho havien de fer els usuaris i podrem explicar/recordar com va entrar la informàtica als Instituts: en les creatives classes d'EATP de programació BASIC. En el document original del treball de recerca podem llegir que *per al programa farem servir el ZX-81 perquè té una ampliació de memòria de 16K*[1]. Quin salt tecnològic en poc més de 30 anys!!!

Idò en el taller podrem contrastar l'encant (per a un cert conjunt del professorat "el record", per a molts altres, més joves, "la novetat", que potser els semblarà impossible) de la situació històrica en què es va fer el treball al costat de l'encant de l'interessant contingut matemàtic. Com que cada pregunta que apareix implica una bona recerca serà el moment de valorar els recursos actuals i per això, en cada apartat es donarà una construcció gràfica actualitzada, completa, amb el GeoGebra 3D i, alhora, si escau una visió amb el CAS del GeoGebra que substitueixi l'elaboració del programa BASIC i que permeti el càlcul dels punts notables d'un tetràedre (si existeixen) a partir dels seus vèrtexs.

[1] Al llarg d'aquest document es mostren en cursiva cites textuals del treball de recerca que es comenta. També se'n reprodueix alguna pàgina: vegeu que, com és lògic per l'època, estava escrit a màquina!

1.0 Comencem amb el GeoGebra 3D

Com que el GeoGebra 3D serà una eina fonamental al llarg del taller començarem la part pràctica amb una posada en comú d'alguns aspectes de l'entorn de treball. Aprofitarem idees d'un taller de les VIII Jornades de l'Associació Catalana de Geogebra [1]. En concret es comentarà com es poden crear punts, com es poden moure amb les icones i la diferència en la presentació si es treballa amb la caixa de representació visible o no.


Visió d'un mateix pla i del pla XY amb la caixa de representació o sense

Naturalment, a la vista de l'objectiu del treball, tot seguit s'exposaran les maneres de construir un tetràedre, ja sigui gràficament o bé entrant-ne les coordenades dels punts i haurem de saber respondre la primera qüestió que es plantejava en el treball de recerca. *Abans de passar a fer càlculs per a estudiar-ne els punts notables cal assegurar-nos que estem treballant realment sobre un tetràedre.* La resposta que es donava era aquesta: *Per a saber si és un tetràedre o no vam pensar en trobar el seu volum i, si aquest és 0, lògicament no hi haurà tetràedre*.

Com ho podem esbrinar amb el GeoGebra? Ho veurem a la finestra algebraica i també mitjançant una entrada al CAS (calculador simbòlic i algebraic) amb l'ús de vectors i determinants.

1.1 Sistemes d'equacions

Una idea enginyosa per a l'elaboració del programa BASIC a què ja ens hem referit era aquesta: *Tots els punts notables que hem calculat per al tetràedre (excepte el baricentre) els hem trobat com a intersecció de tres plans. En cada cas hem buscat els tres plans adequats ... i amb una subrutina que hem elaborat per a resoldre el sistema de les tres equacions i tres incògnites hem pogut trobar el punt*.

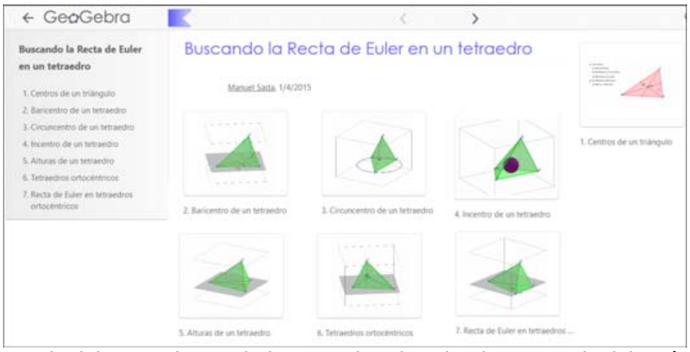
El GeoGebra fa alhora el treball geomètric i el treball algebraic i en mostra la doble visió. Ara bé, el treball intern és sempre analític, tot i que, com passarà al llarg d'aquest taller habitualment no es mostrarà.

Ara bé, és clar que en el GeoGebra també hi ha una subrutina per resoldre sistemes d'equacions però, com podem traslladar-la a l'aula? Mitjançant l'ús del CAS, com mostrarem amb alguns exemples per donar, alhora, la visió gràfica dels sistemes 3 x 3 compatibles, incompatibles i indeterminats.

1.2 Consulta de recursos a l'abast

L'any 1983 el treball de recerca va ser en bona part de creació pròpia. Es van consultar llibres de text de COU o, per alguns aspectes de la geometria analítica, un manual de les Schaum's Series. Tanmateix, actualment és ben segur que convé començar per l'anàlisi de recursos a la xarxa. La revolució tecnològica d'aquests darrers 30 anys ha comportat, com tots sabem, una revolució paral·lela en l'accés a la informació.

Així ho farem també en el taller del C^{2}EM i accedirem a un llibre GeoGebra del mestre Manuel Sada, *Buscando la recta de Euler en un tetraedro*, [10], títol que ens recorda una tasca que fem sovint a les aules quan estudiem la geometria del triangle.

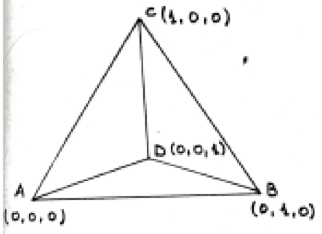


La portada del GeoGebraBook de Manuel Sada sobre la geometria del tetràedre

Al llarg del taller veurem com es poden elaborar algunes d'aquestes aplicacions, aprofundirem el coneixement dels tetràedres ortocèntrics i introduirem un nou punt notable. Però amb aquesta presentació del professor Manuel Sada ja donarem per coneguda la recta d'Euler en els tetràedres ortocèntrics

1.3 Baricentre. Treball analític acurat.

És clar que a l'any 83 del segle passat podíem imaginar (però poc més que somiar) una presentació gràfica com la del GeoGebra 3D. Tanmateix en aquest taller també volem fer una referència a recursos conceptuals de la geometria analítica tal vegada una mica oblidats. A partir de la definició de les mitjanes del tetràedre com les rectes que uneixen cada vèrtex amb el baricentre de la cara oposada, vegeu com es raonava en el treball de recerca.



Escollint una referència adequada (origen : un dels vèrtexs;- vectors base : les tres arestes concurrents en aquest vèrtex), podem arribar a generalitzar el càlcul de les coordenades del baricentre per a qualsevol tetràedre:

Sabem que el baricentre d'un triangle el podem trobar sumant les coordenades dels tres vèrtexs que el formen, i dividint-les per tres. Així,trobem:

G_A(bar. de $\widehat{BCD}$) = (1/3, 1/3, 1/3)
G_B(bar. de $\widehat{ACD}$) = (0, 1/3, 1/3)
G_C(bar. de $\widehat{ABD}$) = (1/3, 1/3, 0)
G_D(bar. de $\widehat{ABC}$) = (1/3, 0, 1/3)

Trobem les medianes del tetràedre, veiem que es tallem totes en el punt G (1/4 , 1/4 , 1/4). Això vol dir que el vector que uneix l'origen de coordenades amb el baricentre dins de la referència triada és el vector (1/4 , 1/4 , 1/4).

Per tant, treballant en qualsevol referènci[illegible] i generalitzant-ho, podem trobar el baricentre de qualsevol tetràedre sumant les coordenades dels seus vèrtexs i dividint-ho per quatre.

Reproducció d'un fragment del treball de recerca per al càlcul del baricentre

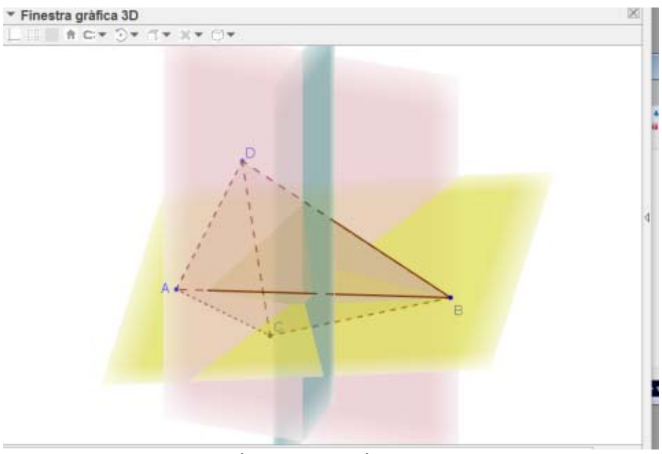
Per a la visió amb el GeoGebra, pot ser interessant practicar en algun cas la materialització del fet que el baricentre d'un tetràedre es pot obtenir sumant les coordenades dels vèrtexs i dividint per 4.

1.4 Circumcentre. Raonem, calculem i dibuixem.

Podem assegurar que hi haurà un punt que equidistarà amb seguretat dels quatre vèrtexs d'un tetràedre? Convé raonar-ho abans de fer cap càlcul! Aquest punt serà el circumcentre, centre d'una esfera que passa pels quatre vèrtexs del tetràedre.

Quin és el conjunt de punts que equidisten d'uns altres dos? Com el podem trobar amb el GeoGebra? Si això ho fem de manera que tinguem en compte tots els vèrtexs, com trobem la intersecció?

Haurem arribat a la idea, ja comentada, del càlcul d'aquest punt notable mitjançant la intersecció de tres plans.



Visualització de l'obtenció del circumcentre

Acabarem l'estudi del circumcentre amb la construcció de l'esfera circumscrita al tetràedre. Pot ser un bon moment per explicar alguna pinzellada de "demostració automàtica" que incorpora el GeoGebra i per comentar que la pantalla 3D possibilita una visió "en 3D real", amb les ulleres adequades, que podrem provar durant el C^{2}EM.

1.5 Incentre

Pel que fa a l'incentre (centre d'una esfera inscrita al tetràedre, tangent a les quatre cares) la part conceptual del treball és anàloga a la que acabem de comentar amb el circumcentre.

Si en aquell cas el conjunt de punts que equidisten de dos punts A i B és el que es pot obtenir amb la comanda del GeoGebra **PlaMitger[A, B]**, el conjunt de punts que equidista de dos plans n'és el pla bisector que no té una comanda definida en el GeoGebra. És a dir, que potser hauríem de començar per fer una macro que ens permetés construir-lo amb rapidesa i després anar per l'estudi de l'incentre.

Aquesta tasca escapa del temps que està previst dedicar a aquest taller. Tanmateix s'indicarà una referència per a descarregar aquesta macro o eina pròpia per si escau de fer la pràctica, durant el taller o després.

1.6 Ortocentre. Caracterització dels tetràedres ortocèntrics.

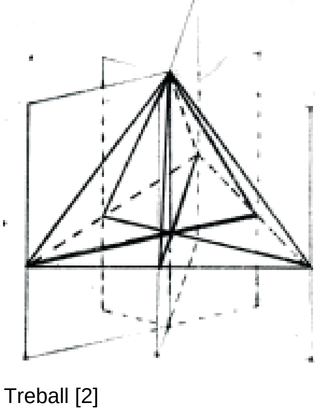
En l'anàlisi de l'aplicatiu del professor Manuel Sada ja hem vist que no tots els tetràedres tenen ortocentre. Tanmateix, allà no es caracteritzen els tetràedres ortocèntrics, cosa que sí que es feia en el treball de recerca. Aquests són els resultats a què s'arribava, amb unes demostracions fetes "sense cap fórmula" i, per tant, amb un ús eficaç dels conceptes d'ortogonalitat i, en concret, del teorema de les tres perpendiculars.

— Les posicions relatives possibles de les altures d'un tetràe-dre són:

1.- Que no es tallin en cap punt, si cap de les arestes que els formen és ortogonal a la seva aresta oposada.
2.- Que es tallin per parelles si només hi ha un parell d'arestes ortogonals.
3.- Que es tallin totes quatre en un mateix punt, si cada aresta és ortogonal a la seva oposada. Es en aquest últim cas, únicament quan el tetràedre tindrà ortocentre.

— Que les parelles d'arestes oposades siguen ortogonals és condició necessaria i suficient per a que el tetràedre tingui ortocentre.

— A tots els tetràedres que tenen ortocentre, les altures passen per l'ortocentre de la cara oposada. Si això es compleix per a una altura, es complirà per a les altres. Es més, per a que un tetràedre tingui ortocentre s'ha de complir el que acabem d'esmentar.



Caracterització dels tetràedres ortocèntrics. Treball [2]

Vist l'enunciat de la caracterització dels tetràedres ortocèntrics, en el taller ens en proposarem la construcció.

Agafarem com a base un triangle del pla horitzontal del sistema de coordenades 3D (de passada comentarem que tot el que construïm en la finestra 2D automàticament queda dibuixat en aquell pla en 3D). Dibuixarem l'ortocentre d'aquest triangle, i veurem que qualsevol punt que estigui "verticalment a sobre" d'aquest ortocentre (és a dir que l'altura del tetràedre des del nou vèrtex passa per l'ortocentre de la cara oposada) serveix com a quart vèrtex d'un tetràedre ortocèntric.

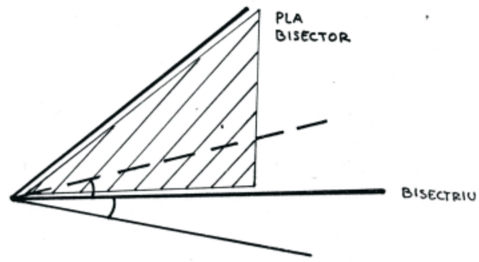
I una vegada fet això comprovarem (amb l'ús d'una eina pròpia que podrem descarregar) que només pel fet d'haver construït una altura de manera que passi per l'ortocentre de la cara oposada, això mateix succeeix amb totes les altures. I també podrem veure que en aquest tetràedre les parelles d'arestes oposades són perpendiculars.

Potser algunes de les persones que llegeixin aquest document hauran fet aquell problema (que els autors del treball [3] esmenten) que diu: *Demostreu que si en un tetràedre dos parells d'arestes oposades són ortogonals, també ho és el tercer parell*. Aleshores una construcció alternativa d'un tetràedre ortocèntric, que podem assajar però no és tan clara com l'anterior, sorgeix amb la idea de construir un tetràedre fent que dues parelles d'arestes oposades siguin ortogonals.

1.7 El filcentre

Durant el debat de l'incentre i l'estudi del conjunt de punts que equidistava de dos plans (el pla bisector) va aparèixer, diguem que "de manera natural", la conveniència de considerar el conjunt de punts que equidisten de dues rectes.

Els autors de [3] també en deien *pla bisector* (com en diríem dels dos plans bisectors, per diferenciar-los?) i el dibuixaven així:



Visualització del conjunt de punts que equidisten de dues rectes

Així passaven a la idea d'una recta que existeix sempre i que és el conjunt de punts que equidisten de tres arestes concurrents d'un tetràedre. Observi el lector que així, de passada, es pot trobar un vector que forma el mateix angle amb uns altres tres vectors, problema analític no gens elemental.

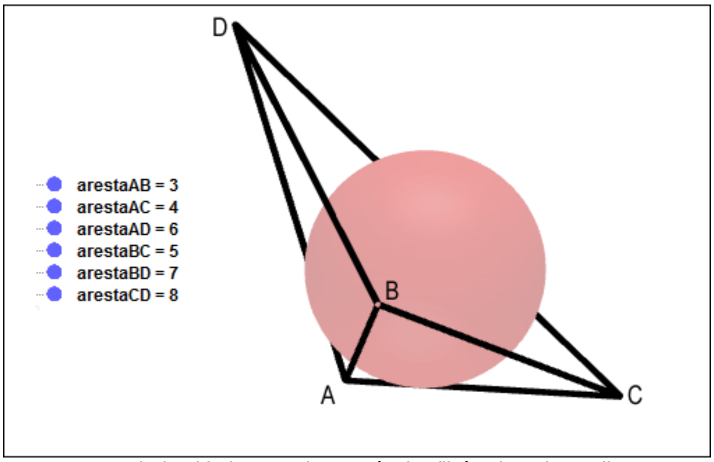
I vist això ja és lògic plantejar-se si existirà o no un punt que estigui a la mateixa distància de les sis arestes d'un tetràedre. En cas d'existir d'aquest punt en direm *filcentre* i seria el centre d'una esfera tangent a totes les arestes.

El nom de filcentre ve donat perquè ens vam imaginar l'existència d'aquest punt pensant en un tetràedre format de filferro i l'esfera com una pilota que s'anava unflant per veure si podia ser tangent a totes les arestes.

El filcentre no sempre existeix; en el treball (i en una tasca posterior a haver-lo entregat) es van poder caracteritzar els tetràedres amb aquesta propietat. Un tetràedre és filcèntric si i només si coincideixen les sumes de les longituds de cada parell d'arestes oposades. El professor Bellot [2] els anomena tetràedres de Crelle o esquelets.

Durant el taller raonarem la necessitat d'aquesta condició de la suma de longituds d'arestes oposades i pensarem si en cas que es compleixi aquesta condició seria possible, com deien els autors de [2], calcular el filcentre mitjançant la intersecció de tres plans.

I per acabar examinarem exemples de tetràedres filcèntrics i, si cal mitjançant l'ús d'una eina pròpia, dibuixarem l'esfera tangent a les sis arestes... i la mirarem amb les ulleres 3D!



Les dades i la imatge d'un tetràedre filcèntric o de Crelle

2. Reflexió metodològica. Aplicació a l'aula

L'autor creu que el treball que es presenta és un bon exemple de treball de recerca, en el qual creu molt interessant de destacar el fet que s'hi treballi des de diferents punts de vista que es complementen. Sens dubte que la globalitat del treball i alguns dels seus apartats poden aportar idees per als treballs de recerca (que tant de bo es poguessin fer en equip!) però també és ben cert que molts dels conceptes i procediments que s'hi treballen tenen cabuda a l'estudi de la geometria de l'espai en el batxillerat.

Trobem al llarg del treball l'ús de la geometria euclidiana de l'espai, molt en especial per al tractament de la perpendicularitat, i el raonament sintètic. Aquest aspecte, fonamental en el treball matemàtic, s'hauria de potenciar molt més del que es fa en el treball a l'aula (i l'autor afegeix, tot i que que potser no sigui "políticament correcte"...encara que no vagi a la selectivitat.)

També hi és present, naturalment, l'enfocament analític, del qual se'n fa un ús en certa manera avançat pel fet d'emprar una referència lligada al problema. Una idea conceptual que seria bo de retrobar (o de fer aparèixer) a les aules perquè dóna claredat a la resolució de molts problemes.

Finalment hi ha l'aspecte de l'ús de la tecnologia. A partir de la reflexió que s'ha fet relativa al fet que no es pot comparar el que es podia fer fa 30 anys i el que es pot fer ara amb els recursos a l'abast, l'autor creu que l'ús del GeoGebra és un valor afegit indubtable en el treball a l'aula de la geometria de l'espai. Això ha intentat exposar en els diversos apartats d'aquest document.

3. Conclusions

En els comentaris que s'han fet en l'apartat de les reflexions metodològiques ja hi és implícita la conclusió que li agradaria a l'autor que traguessin les persones assistents al taller.
Voldria que cada vegada fos més cert que el professorat veu com a imprescindible acompanyar l'explicació de la geometria analítica amb la visió gràfica, i que el GeoGebra pot ser una eina excel·lent per a assolir aquest objectiu.
I, tot i que s'escrigui en segon lloc, amb el mateix grau de prioritat voldria que el raonament de la geometria euclidiana i un ús subtil de la geometria analítica fossin presents en la tasca de cada dia.
Però si tot això no acaba de reeixir, si en el treball s'hi troba alguna idea per a proposar treballs de recerca... endavant!!!

4. Bibliografia i referències

[1] Ancochea, Bernat; Gomà, Antoni. *Geogebra 3D, un pas endavant*. Taller a les VIII Jornades de l'ACG. *Acostem (més) el GeoGebra a l'aula*. Barcelona, 19 i 20 de febrer de 2016. El material del taller es pot descarregar de https://app.box.com/s/iaxqpqjbhyn9a1bp84mumixhh559qlju

[2] Bellot Rosado, Francisco. *Geometría del tetraedro*. Artícle a la Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Edita OEI. Publicada a Internet. Juny 2008. Es pot descarregar de http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero32/Tetraedro.pdf

[3] Bertomeu, Joan; Borràs, Lluís; Caballol, Lluís; Gas de Cid, Maria; Miralles, Àngels. *Traient suc d'un tetràedre (Estudi dels punts notables del tetràedre)*. Institut de Batxillerat de Tortosa, per als premis CIRIT 1983. Es podrà descarregar de http://www.xtec.cat/~agoma/tetraedre

[4] Casals, Rafael et al. *Matemàtica COU*. Editorial Teide. Barcelona 1994.

[5] Euclides. *Elementos*. Biblioteca Clásica Gredos. Libros I-IV, LIbros V-IX, Madrid 1991. Libros X-XIII, ISBN: 9788424918309

[6] Gomà, Antoni. *El tetràedre, un gran desconegut*. Article a SCM/Notícies, número 6, juliol 1997. Societat Catalana de Matemàtiques. Es pot descarregar de http://blogs.iec.cat/scm/wp-content/uploads/sites/20/2011/02/N6.pdf

[7] Marcos, C., Martínez, J. *Matemáticas 4º Bachillerato*. Ediciones SM. Madrid 1960.

[8] Negro, A. et al. *Curso de Matemáticas. Orientación Universitaria*. Editorial Alhambra. Madrid 1978. Proyecto MT62.

[9] Royanes, Eugenio. *Introducción a la geometria*. Editorial Anaya. Madrid 1979.

[10] Sada Allo, Manuel. (1/4/2015). *Buscando la recta de Euler en un tetraedro*. [Llibre del GeoGebraTube]. Recuperat de https://www.geogebra.org/m/LPS1Ng6M?doneurl=%2Fmanuel%2Bsada#