C²EM BARCELONA 2016 CONGRÉS CATALÀ D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA

Com retallar un quadrat

Guillem Bonet Carbó[1], Mireia Alemany, Guillem Bonet, Raül Fernàndez, Imma Font, Anna Manrique, Sílvia Margelí, Victòria Oliu, Mireia Pacreu, Sandra Soliguer, Quim Tarradas[2]

[1] INS Santa Coloma de Farners, 17430 Santa Coloma de Farners, gbonet2@xtec.cat
[2] Membres del grup MatGI, Girona

Resum del taller

Des del grup MatGI, us volem presentar diferents idees per treballar d'una forma manipulativa, intuïtiva i fresca el raonament i la lògica a educació primària i secundària.

En aquest taller us presentarem dues propostes per treballar la geometria a dos nivells diferents (per a educació primària i per a nivell d'ESO): En la primera proposta, es treballaran temes d'àrees, perímetres, simetries, paritat, recompte d'opcions… En la segona proposta, es proposa treballar les mediatrius d'un segment, les bisectrius d'un angle i els eixos de simetria d'una figura.

Si us heu preguntat mai de quantes maneres es pot dividir un triangle equilàter en 4 parts iguals o com aconseguir retallar aquest triangle només en un sol tall, aquest taller és per vosaltres!

PARAULES CLAU: Retallades, geometria, pentamino.

1. Introducció

Paul Lockhard, en el seu article “*El lament d’un matemàtic*” dóna algunes pistes sobre com mantenir la motivació dels alumnes a l’aula de matemàtiques:
“Les matemàtiques són l’art de l’explicació. Si prives els alumnes de tenir l’oportunitat de participar en aquesta activitat - de proposar problemes, fer les seves pròpies conjectures i descobriments, d’estar equivocats, d’estar creativament frustrats, de tenir una inspiració i d’improvisar les seves pròpies explicacions i demostracions - els estàs privant de les matemàtiques en si mateixes.”

Cal defugir doncs d’aquella matèria que es dedica a aplicar receptes disfressades a vegades amb algorismes de càlcul que oculten la veritable bellesa de les matemàtiques.

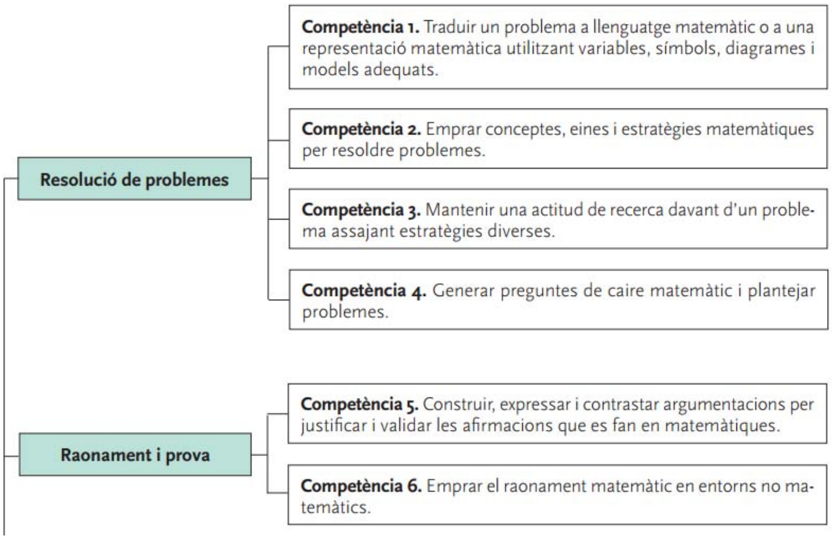
Ens plantegem, doncs, en aquest taller presentar activitats didàctiques amb problemes que ajudin a l’alumne a desenvolupar la seva intuïció. No busquem amb aquests problemes una resposta immediata de l’alumne, sinó més aviat que el problema l’obligui a prendre decisions, a reflexionar i a dissenyar les seves pròpies estratègies. Per aconseguir-ho, plantegem els problemes allunyant-los dels exercicis mecànics que acostumen a fer a l’aula i que només impliquen l’aplicació d’un algorisme o d’una fórmula. En els problemes proposats, en canvi, volem aconseguir implicar l’alumne en la investigació, en la recerca de la solució, de manera que en cada problema hi hagi algun descobriment nou per part de l’alumne.

2. Base de la metodologia proposada

La proposta de treball que exposem (tant pel que fa als tallers com per la seva posterior aplicació a l’aula) està basada en la resolució de problemes, aquests problemes tenen la finalitat de despertar la creativitat de l’alumne al mateix temps que el seu interès per les matemàtiques. Cada un dels problemes que es proposen, amaguen en el seu interior, una base matemàtica que espera a ser descoberta per l’alumne.

El document “Competències bàsiques de l’àmbit matemàtic” difós pel Departament d’Ensenyament ja dóna idees més concretes sobre com treballar les matemàtiques a l’aula “El professor ha de provocar curiositat i proposar reptes i donar prou temps per investigar i reflexionar. [...] Això s’ha de fer en un ambient que afavoreixi l’intercanvi d’idees i que animi a la reflexió. [...] L’acceptació que tothom pot fer contribucions interessants, [...] Ajudarà a crear una cultura de classe més basada en el fer-se preguntes que en la cerca de respostes immediates.”

El mateix document, ens estructura les competències que ha d’assolir l’alumne a l’aula de matemàtiques i ens les agrupa en dimensions. D’aquestes dimensions, pensem que l’activitat proposada treballa d’una tacada les sis primeres competències matemàtiques. I, per tant, estaríem treballant les dimensions de *Resolució de problemes* i de *Raonament i prova* amb les activitats del taller.



Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Secció de les dues primeres dimensions.

Però com ha de resoldre els problemes l'alumne? Una proposta que es fa per al treball d'aquests problemes és l'aplicació del mètode científic. Una idea molt semblant de resolució a la que suggereix George Pólya en el seu llibre "How to solve it". En aquest cas, Pólya ens detallava els punts: "Understanding the problem", "devising the plan", "Carrying out the plan" i "Looking back". Segons el mateix Pólya, tenim un pla de resolució quan sabem quins càlculs, anàlisis o construccions hem de realitzar de forma precisa i ordenada per arribar a la solució del problema. Cosa que és terriblement difícil, per tant, és normal que aquesta idea aparegui de forma gradual.
En cas que aquesta idea no aparegui, Pólya aconsella al professor suggerir alguna idea perquè l'alumne encamini ara sol el problema proposat.

Proposta de mètode científic per a la resolució de problemes:

- Observació - Primers intents: Un cop comprès el problema, l'alumne fa proves (numèriques o no). L'alumne observa aquestes proves i busca relacions entre els diferents resultats que ha obtingut.
- A partir dels intents inicials realitzats, es formulen hipòtesis i s'experimenta amb aquestes per intentar trobar "teoremes" que ens acostin a la solució buscada.
- Un cop trobada, és important que es debati tant en petit grup com en el grup-classe, el professor manté el rol de moderador i passa als alumnes la responsabilitat de validar o no la solució al problema.
- Documentació: un cop resolt el problema, i discutit a l'aula, és necessari que cada alumne reflexioni i que ordeni el seu pensament sobre el procés seguit i els conceptes relacionats involucrats.

Aquesta reflexió ha de ser obligada, cal que la realitzin de forma individual tots els alumnes, ja que ajuda a l'alumne a clarificar les seves idees i a comprendre millor tant els conceptes treballats com les tècniques usades en la resolució de problemes.

3. Els tallers

A fi i efecte de transmetre el màxim nombre d'idees en el mínim temps possible, atendre de forma més propera les necessitats de l'alumnat i simplificar l'estructura del taller al màxim, l'hem dividit en dues parts.
A la primera part titulada "*Divisió de figures en parts iguals*" s'hi ha col·locat problemes que treballen el recompte d'opcions, l'àrea i el perímetre, les simetries centrals, … A la segona amb el títol "*Construcció de figures amb un sol tall*" s'hi proposaran problemes on es treballaran els eixos de simetria, les mediatrius, les bisectrius, ...
Cada una d'aquestes parts serà tractada al taller de forma individual i per nivells. És a dir, de la primera part "Divisió de figures en parts iguals" es crearan dos nivells, un per a professorat d'educació primària i el segon per a professorat d'educació secundària.

La metodologia de treball que es proposa és la indicada en l'apartat 2 d'aquest document. El professor, després de presentar l'activitat, proposa als alumnes que intentin el primer exercici, posteriorment es comenta en grup-classe i se n'extreuen conclusions. És important que abans d'iniciar el segon exercici (similar al primer) tots els alumnes ja tinguin clar de què va i com ho encararan.
Posteriorment, els alumnes han de caminar sols reflexionant després de cada troballa i anotant el que han trobat i la importància que té en l'exercici.
Totes aquestes descobertes es debatran en gran grup, de manera que seran els mateixos alumnes qui rebatran o validaran cada una de les troballes.

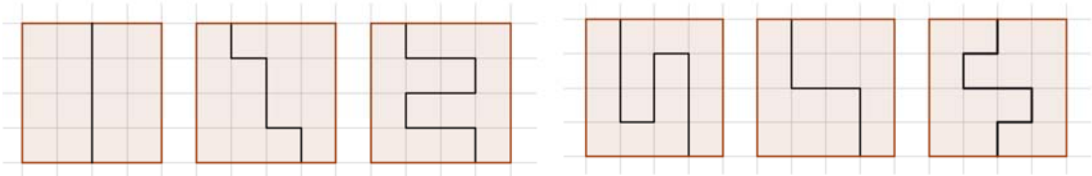
a. Taller 1: Divisió de figures en parts iguals

La primera part del taller conté exercicis per treballar la divisió d'una figura en parts iguals (en figures que tinguin la mateixa àrea i la mateixa forma). Tant a primària com a primer cicle d'ESO es treballa ja amb aquesta idea per introduir el tema de fracció.

En aquest cas no treballarem les fraccions, sinó que ens posarem a veure de quantes maneres diferents podem tallar una figura (senzilla) en n parts iguals. Per simplificar l'exercicis, suposarem que la figura és poligonal i està sobre una retícula quadrada. Així doncs, la partició ha de ser amb peces poligonals construïdes seguint la retícula.
Vegem-ne alguns exemples i anem analitzant amb cada un el suc que li podrem treure:

<u>Exercici 1</u>: Dividiu en dues parts iguals un quadrat 4x4 (seguint la quadrícula).

Bé, la tasca és senzilla, oi? Ara podríem comentar a nivell de grup classe quines solucions han trobat i debatre la validesa, o no, de les solucions trobades. També ens trobarem que es considerin dues solucions iguals tot i no ser idèntiques (per exemple, fent el tall vertical o horitzontal), això cal que ho pactem entre tots.
Seguint amb el mateix exercici, per complicar-la una mica ens podríem preguntar de quantes maneres diferents podem dividir el quadrat seguint la quadrícula. En aquest cas de 6 maneres diferents! (exceptuant rotacions i simetries de les solucions).



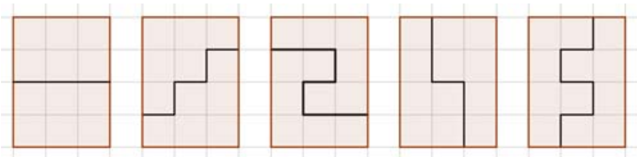
Solucions de l'exercici 1

Un cop trobades totes les solucions, caldria tornar a comentar amb el grup classe les similituds i diferències que troba entre les solucions: Mateixa *àrea* (8 quadres), diferent *perímetre* (la primera és la que té més perímetre), el perímetre exterior (el segment de la peça que coincideix amb el marge del quadrat) sempre *mesura* el mateix (perquè?), totes les divisions de la figura passen pel punt central del quadrat. Hi ha una *simetria central* entre les dues peces que divideixen la figura que té com a centre aquest punt.

No passa res si en una primera posta en comú no surten totes les observacions, ja aniran sortint al llarg dels exercicis. El que sí és important, és recalcar que cal buscar d'una forma ordenada totes les solucions.

Per ampliar l'exercici, ens podríem preguntar com dividir en dues parts iguals altres quadrats 2x2, 3x3, 5x5,... però a mesura que anem augmentant de dimensió augmenta la dificultat de l'exercici. L'alumne tarda molt poc en observar que el cas del 2x2 és evident (només hi ha una forma) i els casos dels 3x3 i 5x5 són impossibles, ja que no es pot dividir un nombre senar de quadrats en dos nombres iguals (no decimals).

<u>Exercici 2</u>: *Dividiu en dues parts iguals el rectangle 3x4 (seguint la quadrícula). De quantes maneres diferents ho podem dividir?*



Solució de l'exercici 2

Observem que en aquest cas es compleixen propietats molt similars a les de l'exercici anterior. Evidentment tenen la mateixa àrea (6 quadradets) però no el mateix perímetre. Es manté també la idea que la mida del perímetre exterior no canvia. En aquest cas torna a tenir una simetria central respecte el punt mig del rectangle (tot i no ser vèrtex) i es manté en totes les figures el segment d'una unitat central.

Per ampliar aquest exercici ens podríem preguntar què passa amb el rectangle 3x2 (només dos casos i també es manté el segment central). O preguntar-nos què passa amb el rectangle 3x5 (no es pot, és senar! però i si li traiem un quadradet? Es podrà? En quins casos? Quantes particions tindríem?)

<u>Exercici 3</u>: *Dividiu en quatre parts iguals un quadrat 4x4 (seguint la quadrícula).*

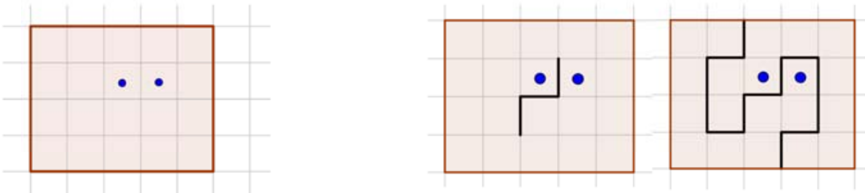
Solució exercici 3

En aquest cas les àrees s'han mantingut iguals a 4 quadrats (4x4:4=4), els perímetres varien (són tots iguals excepte el primer!), els perímetres exteriors tampoc es mantenen. També podem dir que es veuen eixos de simetria central o axial. Si aprofundim un xic mes veurem que són totes tetraminós (falta però la figura z del pentaminó amb la que no podem formar cap quadrat).

Si ja hem detectat que les figures han de ser tetraminós, com que les figures que hi apareixeran han de ser exactament 4 tetraminós, podem anar provant com podem construir un quadrat 4x4 encaixant 4 tetraminós iguals.

L'exercici es pot complicar variant la mida de la figura a retallar o variant el nombre de talls, en aquest cas també estaríem treballant temes de divisibilitat. També es pot exigir que les particions compleixin alguna restricció que vulguem imposar des del principi. Vegeu l'exercici següent:

Exercici 4: Els punts que es veuen a la quadrícula són dos punts de llum. Volem dividir el següent terreny en dues parcel·les iguals que cada una contingui un punt de llum.



Exercici i l'únic detall que tenen en comú les 13 solucions, amb una de les solucions.

Podem ampliar l'exercici demanant que els alumnes afegeixin una altra restricció de manera que amb aquesta, la solució sigui única (a l'exercici anterior hi podríem afegir dues entrades d'aigua al terreny, una per cada parcel·la).

Un altre punt que podem modificar per variar la dificultat és exigir que les figures tinguin la mateixa àrea però no siguin iguals. En aquest cas treballaríem amb diferents *n-minós* (triminós, tetraminós, pentaminós, hexaminós, ...) segons la figura inicial i els talls que en volguéssim treure.

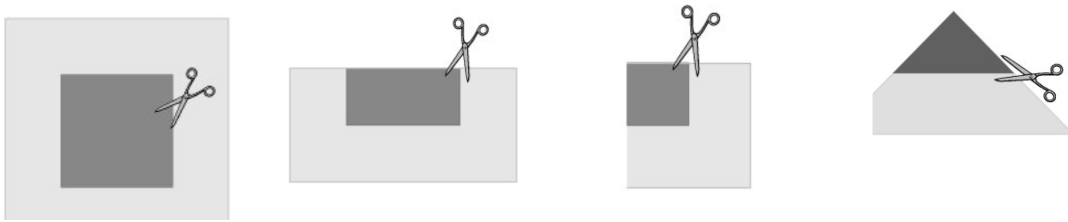
Per acabar, us proposem el següent exercici a tall d'exemple del que s'ha proposat al paràgraf anterior:

Exercici 5: Dividiu en dotze parts el rectangle 6x10 (seguint la quadrícula) de manera que les diferents peces tinguin la mateixa àrea, però no n'hi hagi dos d'iguals.

En cas que aconseguim resoldre aquest darrer (si no hi ha moltes solucions a internet) podríem crear un pentaminó (per exemple de cartolina) retallant aquest rectangle 6x10 sobre cartolina. Així podríem treballar amb l'alumnat de forma manipulativa amb exercicis semblants als que s'han proposat.

b. Taller 2: Construcció de figures amb un sol tall

Partim d'una proposta inicial: si mostrem un full al qual hem retallat un quadrat a la part central, segurament tendirem a plegar el full per fer un tall i un cop tinguem les tisores a dins retallarem la vora del quadrat. 1, 2, 3 i 4 costats.
Com podríem fer-ho per estalviar-nos el tall inicial i retallar el quadrat només amb tres talls rectilinis? I amb dos talls? I amb un sol tall?

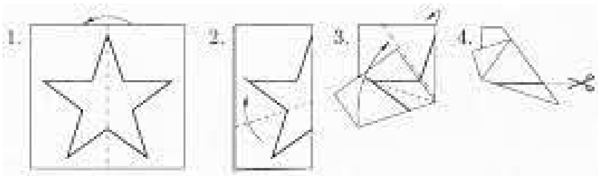


Passos per retallar un quadrat amb 4, 3, 2 o 1 tall.

Aquí comença l'aventura.

Hi ha un teorema curiós, *fold-and-cut theorem*, o el teorema de plegar i tallar, que diu que qualsevol forma que tingui els costat rectes es pot obtenir d'un full de paper plegant i fent al final un sol tall recte. Ens referim a polígons còncaus, convexes, formes amb forats i fins i tot un seguit de polígons que no estiguin connectats entre ells. L'enunciat és, si més no, sorprenent. A partir d'aquí fem un seguit de propostes que podem dur a l'aula i que ens permeten estudiar diferents aspectes lligats a la simetria, tant dels polígons com de cadascuna de les rectes i els angles que els formen.

A partir del que hem experimentat amb el quadrat podem passar a aconseguir, d'un sol tall, un octàgon regular. I després avançarem cap als polígons regulars, observant les diferències entre els de nombre parell i senar de costats.
Un petit pas més serà fer, d'un sol tall, estrelles de diferent nombre de puntes.



Passos per retallar l'estrella amb un sol tall.

Podem optar per seguir un recorregut més artístic o intentar endinsar-nos en qüestions de recerca matemàtica, i anirem triant els reptes en un o altre sentit.

Si volem estudiar els plecs mínims partirem de figures dibuixades prèviament al paper: quadrilàters de tota mena, triangles equilàters, isòsceles i escalens, i polígons independents.

4. Bibliografia

Grupo Alquerque, *Kirigami geométrico. Revista Suma*. núm. 59., 2008.

Jareño, Joan. *Calaix2.blogspot.com.es. D'un sol tall (1) i (2)* Novembre 2015.

Lockhard, Paul. *Lamento de un matemático*. Antonio Pérez Sanz (responsable de la secció "Matemáticas en las aulas de secundaria". *La Gaceta de la RSME*. 2008. Volum 11, número 4. Pàgines 739-766.

Morera, Laura. *Problemas ricos en argumentación para secundária: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor*. Chico, J.; Badillo, E.; Planas, N. *Revista SUMA*. Ed. FESPM. Juny 2012. Núm. 70. Pàgines 9-20.

Pólya, George. *How to solve it*. *A new aspect of mathematical method*. Penguin books. 1990 . ISBN 978-0-14-012499-6.