

Una fitxa de dòmino, una fracció... o dues!

Josep Lluís Pol i Llompart¹

¹ IES Marratxí, 07141 Marratxí, joseplpol@xeix.org

Resum de la comunicació

Són prou coneguts els materials didàctics anomenats *dòminos de fraccions* que procuren una relació visual i lúdica entre diverses representacions del concepte de fracció. En aquest cas, emperò, l'activitat de classe que es presenta és el fruit d'una investigació duta a terme per alumnes de 1r d'ESO en el marc del concurs Videomat 2016 (producció que guanyà el premi de la seva categoria). Es tracta de saber quines operacions bàsiques (+, -, x, :) es poden fer mirant les fitxes del dòmino com si es tractàs de fraccions. En realitat, la fecunditat d'aquesta mirada prové de la restricció de treballar amb un conjunt concret i finit de fraccions. L'intent d'abastar el màxim d'operacions particulars i diferents (per exemple, $2/2 + 3/2 = 5/2$) obliga a reflexionar sobre temes com la divisió per zero, les fraccions equivalents, l'equivalència d'operacions...

PARAULES CLAU: Dòmino, fraccions, operacions

Aquests materials estan sota una llicència
Creative Commons 4.0 Internacional del tipus



Origen de la proposta

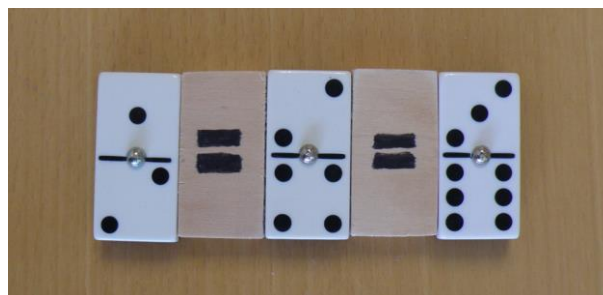
El 1r d'ESO D de l'IES Marratxí del curs 2015-2016 és un grup intel·lectualment inquiet. Coneixen la importància de les preguntes i no s'estan de demanar tot allò que els passa pel cap. Quan se'ls proposa participar en el concurs del Videomat 2016, les propostes són moltes i variades. Vàrem haver d'escollir-ne dues, una de les quals, precisament aquesta que aquí descrivim, fou la guanyadora del concurs en la seva categoria. L'altre proposta triada, de caire molt diferent, fou: *Quant és la meitat d'una eternitat?*

Primeres aproximacions, primeres decisions

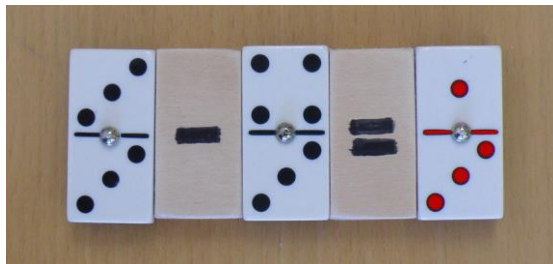
Hem de reconèixer que la pregunta inicial proposada era en realitat *quantas operacions podem fer amb les fraccions de les fitxes del dòmino?* (Parlarem sempre d'operacions senzilles de sumar, resta, multiplicar o dividir només dues fraccions i obtenir un resultat.) La primera passa, lògicament, fou començar a reconèixer operacions concretes amb les fitxes del dòmino. Aquest treball inicial es feu en grups relativament petits (4, 5 o 6 persones) i amb la representació sobre paper. Ja durant la primera hora lectiva aparegueren les primeres preguntes i es varen haver de prendre les primeres decisions. Les preguntes foren:

- Quines fitxes té un dòmino?
- És vàlid girar les fitxes d'un dòmino?
- Hi ha fitxes de dòmino equivalents?
- Es poden repetir fitxes en una mateixa operació?
- Es poden acceptar fraccions negatives?

La pregunta de quines fitxes té un dòmino és lògica perquè no tots els alumnes tenen per mà aquest joc de taula. Contestar-la va donar ocasió als alumnes a ordenar les fitxes establint un criteri de classificació (es fa proposar també que totes les fraccions diferents de la unitat es col·locassin com a pròpies). Després, sorgí la pregunta de si es podien girar. La resposta fou unànime i es va decidir que sí (en aquesta fase encara no havia aparegut el problema del denominador zero). Amb les fitxes dobles comparegué la qüestió de les fraccions equivalents, que ben aviat s'estengué a altres fitxes.



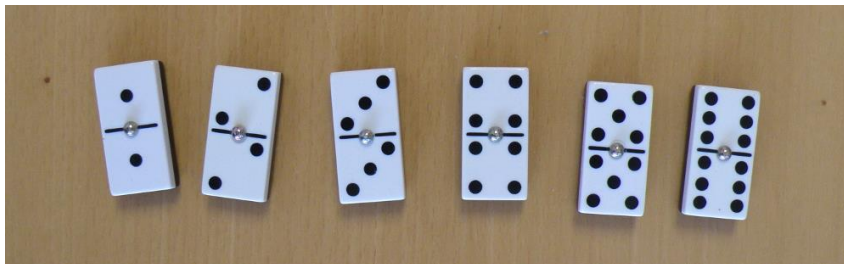
Llavors, el fet de tenir fitxes equivalents va donar ocasió a parlar de si es podien repetir fraccions en una mateixa operació. Es va decidir que sí, però davant la previsió de tenir moltes operacions possibles, es va decidir que només es podien repetir aquelles fraccions de les que el mateix i únic joc de 28 fitxes proveís en equivalents. (És a dir, podríem fer $1/3 + 1/3 (2/6) = 2/3$ però no $1/5 + 1/5 = 2/5$). Fins i tot un alumne va contemplar la possibilitat d'operar amb fraccions negatives. La resposta també fou negativa, però és imaginativa la possible solució aportada per una alumna de disposar d'un joc de dòmino amb els punts vermells per a aquesta situació.



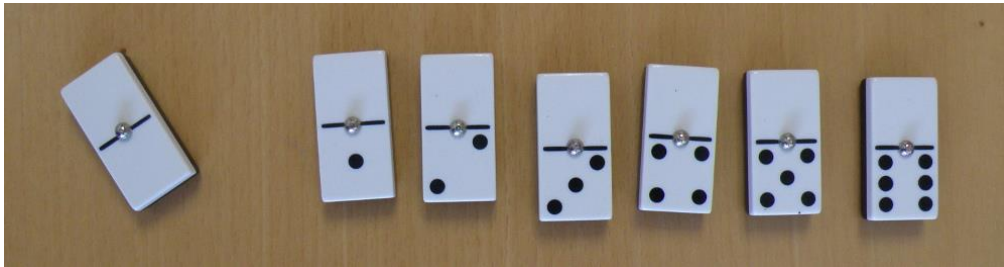
Respecte de les proves sobre les operacions possibles, aquest objectiu dotà de bon significat el tema de la simplificació. No es podia tenir la fitxa $9/12$, però podíem posar la seva equivalent $3/4$.

El problema de dividir per zero

En el procés de contemplar les fraccions del dòmino per duplicat, és a dir, intercanviant numerador i denominador, varen aparèixer dos aspectes interessants. El primer, que en part ja hem comentat abans, el fet que totes les fitxes anomenades dobles, són en realitat la mateixa fracció tant girades com entre elles, és a dir, la unitat. S'ha de dir que aquest procés no va ser ni ràpid ni trivial, i que en realitat, part de la classe no va acabar d'entendre del tot aquest extrem.



L'altre punt és el de les fitxes que contenen un blanc, és a dir, l'equivalent al zero numèric. Amb certa facilitat, l'alumnat entén la fracció quan el zero és al numerador però es posa en evidència la dificultat d'entendre un zero al denominador, perquè no entra dins el concepte natural de denominador com a nombre de divisions del tot. Aquí vàrem considerar que no era el moment (i molt probablement no sigui tampoc el curs) adient per entrar en temes com aquest. Vàrem decidir que les fitxes amb el zero al numerador no es podien girar i que, a més, el doble zero es podia eliminar perquè no tenia cap sentit.



Entendre la reciprocitat de les operacions

Probablement, un dels aspectes més importants i potents del treball amb les fraccions del dòmino, atenent a la intenció inicial de comptar el nombre d'operacions, és la reciprocitat entre operacions. Parlam de:

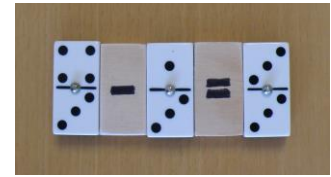
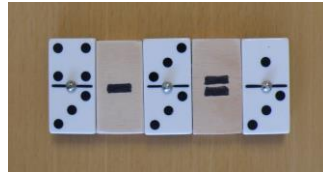
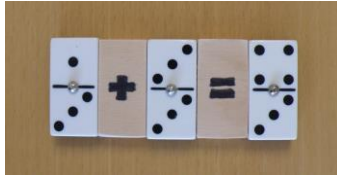
- Quines restes impliquen les sumes i a l'inrevés
- Quines divisions impliquen les multiplicacions i a l'inrevés
- Quines variacions podem fer amb les operacions

Tot i que a la fase final on es varen discutir aquestes qüestions els alumnes ja havien treballat l'àlgebra (cosa que sempre reforça aquestes qüestions), no va ser fàcil que reconeguessin la relació de doble sentit entre les sumes i les restes, o el seu equivalent entre les multiplicacions i les divisions. De fet, creim que només un terç de la classe (una classe que podem classificar com a "bona en matemàtiques") va entendre bé aquest extrem.

L'objectiu que intentàvem mantenir a nivell operatiu, el de saber quantes operacions es podien fer amb les fitxes d'un joc de dòmino, ens ajudava a justificar aquesta feina de relació. En principi les operacions podien ser molt nombroses, inabastables per alumnat de 1r d'ESO, i precisament això els empenyia a cercar relacions que poguessin simplificar la feina sistemàtica de trobar operacions relacionades a partir d'algun tipus d'operació base.

Propietat commutativa: fou relativament senzill que l'alumnat arribàs i decidís sense intervenció que l'ordre dels sumands o dels factors no donava lloc, en realitat, a una nova operació computable.

Reciprocitat d'operacions. No fou tan immediat, com hem comentat, que els alumnes arribassin a la conclusió que a partir d'una suma podien sempre escriure dues restes. Aquest concepte ja ve de cursos enrere de Primària però segurament no està prou treballat en el món de les fraccions, món que els alumnes capten com a distint o especial. Però al que no arribaren els alumnes per si mateixos, fou el tema de la reciprocitat estricta en les operacions, és a dir, al fet que si establim totes les sumes possibles, queden tancades també totes les restes possibles i que, per tant, només cal cercar sumes.



Per explicar-ho a la classe, es va procedir a fer una prova utilitzant la reducció a l'absurd.

És a dir, suposam que tenim totes les sumes, i que hi ha una resta que no està contenida en les sumes. Però llavors, aquesta resta necessàriament dona lloc a una suma possible, i això contradiu el punt de partida.

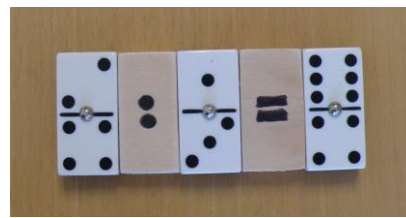
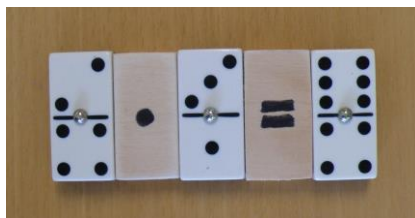
No estam segurs que gaires alumnes entenguessin en la seva totalitat el problema plantejat. I el mateix vàrem fer amb la multiplicació i la divisió, atenent a la prova de la divisió i la propietat commutativa de la multiplicació. Altre vegada, la percepció del conjunt de les fraccions com quelcom diferent dels altres conjunts numèrics, entorpeix la comprensió.

Propietats especials

Possiblement un dels aspectes més creatius d'aquest treball fou el descobriment del que els alumnes anomenaren "propietats especials".

La primera propietat especial que detectaren fou la de què en la multiplicació, es podien invertir totes les fraccions i l'operació seguia essent vàlida. Tot d'una, per comparació, alguns alumnes formularen la hipòtesis que amb les sumes podien fer el mateix, cosa que en ser convidats a comprovar-ho, veieren que no era així. Curiosament, ningú no va descobrir que amb les divisions es podia fer el mateix.

L'altra propietat especial descoberta, fou la de que si tenim una multiplicació, aquesta es pot transformar en una divisió invertint el segon factor. A partir d'aquesta divisió es pot tenir una nova multiplicació que per reciprocitat convocarà dues divisions, una de nova, i l'altra ja sabuda.



Han quedat encara algunes "propietats especials" per descobrir i aclarir quantes operacions diferents es poden fer amb les fraccions d'un dòmino.

Apunts metodològics i de recursos

Durant la major part de les sessions (cinc en total), es treballava en petits grups de 3, 4 o 5 alumnes. Quan s'havia treballat un temps, es feia una comunicació parcial dels

resultats obtinguts, de les propietats descobertes o dels problemes trobats. Una vegada comentats, se seguia en les direccions marcades i es tornava a repetir la dinàmica. En els punts més febles, el professor aprofitava per reforçar o tornar explicar els aspectes necessaris que ajudassin a garantir la comprensió del treball i la seva direcció.

En les primeres sessions, es va treballar senzillament amb fraccions escrites en paper i no fou fins al final que es varen utilitzar fitxes de dòmino reals. Potser per això mateix, el treball amb fitxes no fou tan ràpid com la representació sobre paper. Però fou precisament el treball amb fitxes el que inspirà la troballa d'alguna de les "operacions especials". Només per a la filmació del Videomat, el professor va fabricar fitxes que representassin les operacions.

Reflexions i potència didàctica

És sabut que el treball sotmès a restriccions afavoreix -per necessitat- la comprensió i la creativitat. El que nasqué com una proposta de comptatge d'operacions amb fraccions, s'ha revelat com una dinàmica oportuna de -en paraules de David Barba i Cecília Calvo- pràctica productiva.

Evidentment l'assaig-error té un lloc important en la investigació d'aquest petit projecte, especialment en les primeres fases de descobrir, una mica a l'atzar, quines operacions es poden concretar.

La pràctica manipulativa de les fitxes de dòmino facilita el treball col·laboratiu dels alumnes i pensam que és important l'ús de les fitxes des del primer moment.

A partir d'aquest treball a classe ens hem adonat que sovint les operacions amb fraccions, reduïdes potser a una algorítmia estranya, són percebudes pels alumnes com un conjunt numèric amb unes regles d'operació diferents de les dels altres conjunts numèrics que coneixen (especialment els naturals i no tant els enters).

Tot i que és difícil d'assolir, el repte d'intentar saber el nombre d'operacions possibles per fer amb un joc complet de dòmino dota de sentit bona part de les activitats i empeny els alumnes a cercar estratègies de càlcul i relació.

Notes

De la feina feta pels alumnes, en resta en xarxa la producció del videomat 2016, que es pot localitzar fàcilment posant: "Videomat + Marratxí + dòmino" en el cercador del *youtube*.

<https://www.youtube.com/watch?v=AlaYL-WYBml>

Publicat per IES Marratxí el 8 d'abril de 2016 amb el títol de: *Videomat 2016: Quines operacions podem fer amb les fraccions d'un dòmino?* (consultat per darrera vegada el 31 de maig de 2016)