

## Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat (matemàtiques de les CCSS) i el GeoGebra: una terna prodigiosa

**Jordi Esgleas Giménez<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Escola pia Sarrià-Calassanç, jordi.esgleas@sarria.epiaedu.cat

### Resum de la comunicació

La tecnologia, i en particular el GeoGebra, pot ajudar els alumnes a l'inici del batxillerat a enfrontar-se amb els problemes de selectivitat. Els continguts de matemàtiques treballats a 3r d'ESO i molt especialment a 4t ja doten l'alumnat de les eines suficients com perquè, alliberats de la pressió que els suposa el càlcul i els procediments algebrcs per a la resolució d'equacions i sistemes, puguin afrontar els problemes de selectivitat amb èxit.

El GeoGebra els (ens) ofereix la possibilitat de visualitzar gràficament gran part dels problemes, podent arribar a la seva solució amb l'observació del comportament de les funcions o la interpretació amb més facilitat dels sistemes d'inequacions. A més, el seu mòdul CAS dona una enorme potència de càlcul a l'hora de resoldre equacions i sistemes.

**PARAULES CLAU:** ESO, selectivitat , GeoGebra.

Aquests materials estan sota una llicència

Creative Commons 4.0 Internacional del tipus 

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa****1. Introducció.**

Probablement compartiríem l'afirmació que, en termes generals, els alumnes que no tenen un especial gust per les matemàtiques a l'hora de triar quin batxillerat fan, s'inclinen per les opcions dels batxillerats socials i/o humanístics. I que com a "mal necessari" aquests alumnes cursen la matèria de matemàtiques de les CCSS. Segurament també compartiríem que entre l'alumnat hi ha la creença que aquestes matemàtiques són més fàcils, i ara també observem com alguns alumnes dels batxillerats tecnològic o científic trien aquesta matèria per examinar-se per a la selectivitat.

Convindrem també que aquests alumnes, em refereixo a tots però especialment als primers, una de les dificultats que tenen és en el càlcul algèbric, la resolució d'equacions i després, en el batxillerat, el càlcul diferencial i integral.

Podem pensar que les idees matemàtiques que entren en joc no són gaire complexes i que si els alumnes els tenen por és més que res per l'execució dels procediments de càlcul que els absorbeixen massa i no els deixa pensar en el "què" amoinant-se amb el "com".

Tot plegat ens pot portar a plantejar-nos la pregunta següent:

Només amb les matemàtiques previstes en el currículum de l'ESO i amb el GeoGebra com a eina de treball es poden resoldre els problemes de selectivitat de les matemàtiques de les CCSS ?

Aquesta pregunta és el punt de partida de la present comunicació i la hipòtesi que pretenem establir és que sí. Que únicament havent treballat els continguts establerts en el currículum d'ESO i amb un domini bàsic del GeoGebra es poden resoldre els problemes de selectivitat corresponents a les matemàtiques de les CCSS.

Per abordar la qüestió s'ha fet un buidat, s'han categoritzat els problemes d'exàmens de selectivitat dels darrers set anys, s'ha analitzat el currículum de l'ESO i s'han resolt alguns dels problemes de totes les categories amb el GeoGebra. A més, s'han deixat construccions en GeoGebra preparades per a el treball de l'alumnat que els permetrà resoldre els diferents tipus de problemes.

Tot plegat permetrà desenvolupar a l'aula no només les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic, sinó que a més, la competència digital que és transversal en el currículum.

Com a conseqüència d'aquest treball, a més, es verifica com l'ús adequat de la tecnologia permet a l'alumnat una potència de càlcul que l'allibera per centrar-se en el nucli del problema, tal i com ja defensava en el llunyà 1992 el professor Miguel de Guzman en el seu ja famós article "*Tendències innovadores en educació matemàtica*".

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa**

## 2. Els problemes de selectivitat.

Per abordar la qüestió plantejada s'ha partit de l'anàlisi dels exàmens de matemàtiques de les CCSS de selectivitat dels darrers 7 anys i s'han establert 9 categories de problemes i/o exercicis plantejats.

A l'hora de categoritzar s'ha considerat el terme problema segons queda definit en el currículum de l'ESO en que es defineix el problema com *“una proposta d'enfrontament amb una situació desconeguda que es planteja a través d'un conjunt de dades dins d'un context, per a la qual, en principi, no es disposa d'una resposta immediata i que requereix reflexionar, prendre decisions i dissenyar estratègies.”*. Igualment hom ha establert una categoria per exercicis també entès com fa el currículum d'ESO que defineix exercici com *“una activitat que pot portar-se a terme mitjançant la simple aplicació de tècniques, algorismes o rutines més o menys automatitzades”*.

### Problemes de funcions en context. (1)

Inclouen els problemes en què l'alumnat ha de respondre a preguntes a l'entorn d'un determinat fenomen de la realitat modelitzat per una funció. El tipus de funcions que es plantegen són polinòmiques, quadràtiques, racionals, de proporcionalitat inversa i excepcionalment irracionals (problema 1 sèrie 4 2012-2013).

### Problemes d'anàlisi de funcions. (2)

En aquesta categoria s'hi han inclòs els problemes en què l'estudi de la funció no respon a un cas de la realitat més o menys propera a l'alumnat sinó que el que se li proposa és que analitzi alguna de les propietats i/o característiques de les funcions: extrems, asímptotes, creixements o decreixements. En aquest cas el ventall de funcions és diferent: hi apareixen funcions definides a trossos, exponencials, racionals i polinòmiques.

### Exercicis de sistemes lineals. (3)

Aquesta categoria és la menys freqüent en la sèrie d'exàmens analitzada (només apareix en tres ocasions) i inclou sistemes d'equacions lineals en els que únicament es demana que es procedeixi a la seva resolució.

### Problemes de sistemes lineals en context. (4)

En aquest cas la proposta és la resolució d'un problema plantejant, en la majoria de casos, sistemes lineals de tres equacions amb tres incògnites.

En aquests tipus de problema és freqüent constatar que un cop plantejat el sistema correctament, els alumnes presenten dificultats en la resolució, sempre a causa de la dificultat del tractament del llenguatge algèbric. Ens atrevim a afirmar que el consens està en què el què és important és el plantejament del problema i que per a la resolució, la tecnologia actual pot ser determinant.

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa**

Problemes d'equacions lineals. (5)

En aquesta categoria únicament s'hi planteja un treball al voltant dels conceptes d'equació i de classificació de sistemes lineals a partir del nombre de solucions que presenten.

Problemes d'àlgebra. (6)

En aquesta categoria hi ha inclòs els problemes de matrius.

Problemes de programació lineal en context. (7)

Inclou els problemes de programació lineal en què la situació problemàtica a resoldre es situa en un context proper per a l'alumnat. Hi ha un cas particular (6<sub>E</sub>) en què el context és geomètric.

Problemes de programació lineal teòrics. (8)

Aquesta categoria fa referència a problemes de programació lineal o a problemes en què s'han de plantejar sistemes d'inequacions en un marc estrictament matemàtic amb referències sovint geomètriques.

Problemes de geometria. (9)

Hi ha únicament quatre problemes. En tots ells el treball a fer està centrat en l'equació de la recta que bé es pot resoldre amb l'equació explícita de la recta (6<sub>B</sub>) relacionant-ho amb la funció lineal i els sistemes lineals d'equacions (6<sub>A</sub>); equacions de la recta i matrius (3<sub>C</sub>); i equacions de la recta i funcions (4<sub>D</sub>)

En el quadre següent hi ha classificats tots els problemes i exercicis dels exàmens analitzats per a cada una de les 9 categories abans descrites.

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa**

Tipus prob.	08-09		09-10		10-11		11-12		12-13		13-14		14-15	
	Sèrie	Prob.	Sèrie	Prob.	Sèrie	Prob.	Sèrie	Prob.	Sèrie	Prob.	Sèrie	Prob.	Sèrie	Prob.
1	1 3 4	6 3 3,6	1 2 4 5	4 3 6 2	1 2 4	5 1 6	1 3 4	1 3 5	3 4	4,5 1,3	3 4 5	3 1,4 2	2 4 5	1 3 2,4
2	1 3 4	3 1	1 2 4 5	1,2 2,6 2,3 4,5	1 2 4	3,6 6 1,4	1 3 4	3,5 1,5 1,2	3 4	2 6	3 4 5	2,6 5 3	2 4 5	3,5 2,5 3
3	1 3 4	4	1 2 4 5		1 2 4		1 3 4		3 4		3 4 5		2 4 5	2
4	3 4	6 2	1 2 4 5	3 1 1	1 2 4	1 4	1 3 4	4 6 3	3 4	1 4	3 4 5	1 6 1,4	2 4 5	1
5	1 3 4	2,4 4 4	1 2 4 5		1 2 4	5	1 3 4		3 4		3 4 5		2 4 5	
6	1 3 4		1 2 4 5	5 5 6	1 2 4	4 5 3	1 3 4	6 3 6	3 4	3 2	3 4 5	4 3	2 4 5	4 4 5
7	1 3 4	5 5	1 2 4 5	4 3	1 2 4	2	1 3 4		3 4	6 5	3 4 5	5 2 5	2 4 5	6 6 <sub>E</sub>
8	1 3 4	1 2 1,5	1 2 4 5	5 4	1 2 4	1 2	1 3 4	2 2 4	3 4		3 4 5		2 4 5	
9	1 3 4		1 2 4 5	6 <sub>A</sub>	1 2 4	3 <sub>C</sub>	1 3 4	4 <sub>D</sub>	3 4		3 4 5		2 4 5	6 <sub>B</sub>

Distribució dels tipus de problema que apareixen als exàmens de selectivitat de les matemàtiques de les CCSS dels cursos 2008-2009 al 2014-2015

## 2. El currículum de l'ESO.

A partir del decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria d'acord amb un model d'ensenyament i aprenentatge de caràcter competencial, s'han pogut establir quines competències pot desenvolupar l'alumnat treballant els problemes de selectivitat amb suport del GeoGebra, en aquest sentit de les 12 competències que estableix el currículum, es considera que aquí es desenvolupen les quatre competències de la dimensió de la resolució de problemes i tres de les dimensió comunicació i representació.

Atès que el treball proposat a l'alumne és la resolució de problemes de diferents àmbits en qualsevol cas es treballen competències següents:

Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.

Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa**

Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.

Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.

Però com que el valor de la resolució de problemes també rau en com s'expliciten els resultats obtinguts i els processos utilitzats tant matemàtics com tecnològics, prenen molta importància les competències de la dimensió comunicació i representació.

Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.

Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.

Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

Els continguts curriculars que caldrà mobilitzar són els següents:

**Continguts de 3r ESO:**

**Canvi i relacions.**

Funcions lineals i funcions de proporcionalitat inversa (CC4, CC5, CC6, CC7).

Equacions de 1r i 2n grau i sistemes d'equacions de 1r grau (CC4, CC5, CC7).

**Continguts de 4rt ESO.**

**Canvi i relacions.**

Funció quadràtica, exponencial i logarítmica (CC4, CC5, CC6, CC7).

Funcions definides a trossos (CC4, CC5, CC6, CC7).

Equacions de grau superior o igual a 2 (CC4, CC5, CC7).

Inequacions lineals (CC4, CC5, CC7).

**Espai i forma.**

Geometria analítica en el pla.

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic.

CC5. Patrons, relacions i funcions.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules.

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat (matemàtiques de les CCSS) i el GeoGebra: una terna prodigiosa**

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions.

CCD24. Aprenentatge permanent: entorns virtuals d'aprenentatge, recursos per a l'aprenentatge formal i no formal a la xarxa...

### **3. Els problemes i exercicis amb GeoGebra.**

La col·lecció de problemes s'ha preparat en un GeoGebraBook, (accessible a l'enllaç <http://goo.gl/3ZdEY6> ) que s'ha dividit en 14 capítols en què s'inclouen problemes totalment resolts i problemes en què se n'ofereix la solució (a vegades amb algunes indicacions de com abordar-lo des del punt de vista de les matemàtiques, a vegades amb indicacions referides a l'ús del programa: comandaments, sintaxi, ...) però amb la construcció oberta perquè sigui el propi alumne el que resolgui el problema.

A la data de tancament d'aquesta comunicació no estan tots els problemes resolts però sí que hi ha una selecció variada i significativa de totes les tipologies de problema diferents que permeten avalar la hipòtesi plantejada a la introducció.

Igualment volem deixar clar i insistir en què el procediment utilitzat per a la resolució dels problemes ni és l'únic ni, segurament en molts casos, el millor. En tot cas n'és un i que s'ha procurat que fos senzill. Per tant, queda marge i s'anima l'alumnat i professorat a buscar altres formes de resoldre'ls.

1. Problemes de funcions en context (problemes resolts)
2. Problemes de funcions en context (problemes per resoldre)
3. Problemes d'anàlisi de funcions (problemes resolts)
4. Problemes d'anàlisi de funcions (problemes per resoldre)
5. Exercicis de sistemes lineals (exercicis per resoldre)
6. Problemes de sistemes lineals en context (problemes resolts)
7. Problemes de sistemes lineals en context (problemes per resoldre)
8. Problemes d'equacions lineals.
9. Problemes d'àlgebra (problemes resolts)
10. Problemes d'àlgebra (problemes per resoldre)
11. Programació lineal en context (problemes resolts)
12. Problemes de programació lineal en context (problemes per resoldre)
13. Problemes de programació lineal teòrics.
14. Problemes de geometria

Atesa la tipologia diferent dels problemes, l'alumnat es veurà empès a utilitzar tant les vistes gràfiques i algèbriques com el mòdul CAS per a la resolució de sistemes i matrius.

Els avantatges de treballar amb GeoGebra són evidents, no només permeten alliberar l'alumnat de l'angoixa del "càlcul mal fet" sinó que a més els ajuda a visualitzar els problemes (especialment els de funcions) gràficament i en un entorn dinàmic.

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat (matemàtiques de les CCSS) i el GeoGebra: una terna prodigiosa**

Per, tal de resoldre alguns d'aquests problemes, l'alumnat s'ha d'haver introduït en el concepte de la derivada d'una funció o del pendent de la recta tangent a un punt d'una corba. Aquest contingut curricularment no correspon a l'ESO, però s'hi pot arribar a partir de les "taxes de variació" i l'entorn dinàmic del GeoGebra. Per aquesta raó s'hi han inclòs algunes explicacions teòriques i alguns applets per comprendre el concepte de la derivada des d'un punt de vista geomètric i sense entrar en el concepte de límit ni en la definició formal de derivada d'una funció.

Igualment per resoldre alguns problemes d'equacions lineals (5) i d'àlgebra (6) caldria treballar prèviament els conceptes de sistema (lineal) i la seva classificació segons el nombre de solucions i introduir el concepte de matriu (propi del batxillerat) i la idea que es poden tractar com a objectes matemàtics susceptibles de ser utilitzats en equacions (veure capítol 9 del GeoGebraBook <http://goo.gl/gRbwuK> ).

Per tot plegat, i com ja s'ha dit anteriorment, que cal es donen algunes indicacions per poder utilitzar els comandaments, sobre tot del CAS, amb indicacions sobre la sintaxi amb què s'han d'escriure els comandaments.

A data de la redacció d'aquesta comunicació el material compta amb els 14 capítols abans indicats. Però el caràcter dinàmic i obert del GeoGebra permet a l'hora "baixar-se" les construccions, modificar-les, ampliar-les, adaptar-les, si s'escau corregir-les, i per descomptat ampliar el GeoGebraBook amb nous problemes, fent-ne d'aquest material un material ideal pel treball cooperatiu.

### **3. El treball a l'aula i l'ús del GeoGebraBook.**

L'ús d'aquest material a l'aula, tal i com s'ha comentat, requerirà d'un treball previ especialment en àlgebra, inequacions i funcions.

És un material pensat pel treball autònom de l'alumnat de primer de batxillerat de les CCSS i/o d'alumnat avançat de 4t d'ESO.

Pel que fa als problemes resolts, el treball a realitzar hauria d'estar centrat en la comprensió del problema i en treballar les competències de la dimensió comunicació, Seria ideal que la feina de l'alumnat es centrés en fer explicacions sobre el procediment i sobre els conceptes emprats en el seu quadern de treball.

Pel que fa als problemes per resoldre, utilitzarà el GeoGebra treballant la competència 12 relativa a l'ús de les tecnologies.

L'acompanyament del professorat hauria de prioritzar dos aspectes. L'un més relacionant amb el treball matemàtic per ajudar a trobar l'enfocament dels problemes i a la comprensió de les eines matemàtiques a usar. L'altre donar suport en l'eina a utilitzar: el GeoGebra.



**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa**

Els inconvenients que poden sorgir estaran en les dificultats que l'alumnat pot tenir en l'ús del programa, en la capacitat d'anàlisi, reflexió, síntesi i explicació dels processos que intervenen en els problemes. Finalment poden sorgir dificultats a causa de la infraestructura. En aquest sentit cal esmentar que idealment cada alumne hauria de disposar d'un ordinador per a poder dur a terme el seu treball de manera autònoma i adequada al seu ritme.

L'accés al material es pot donar facilitant l'enllaç a l'alumnat cosa que li permetrà treballar "on line" encara que el professorat, si ho creu convenient, podrà descarregar-se les construccions dels problemes per resoldre, adaptar-les i facilitar-les als seus alumnes de manera que podran guardar les noves construccions que facin amb les solucions dels problemes.

L'avaluació del treball s'hauria de plantejar d'una banda en una avaluació per part dels alumnes del material i de la metodologia que suposa i poder, així, copsar-ne la idoneïtat i fer-ne adaptacions o modificacions. I d'una altra banda en una avaluació del grau d'assoliment dels treball al qual ha arribat l'alumnat. En aquest sentit idealment haurien de poder fer els problemes d'avaluació utilitzant també el GeoGebra. Cal esmentar aquí que aquest és un material que no es presenta en la present comunicació ni en el GeoGebraBook que es facilita.

#### **4. Conclusions.**

L'alumnat de primer de batxillerat de les CCSS està en disposició de resoldre els problemes de selectivitat de matemàtiques de les CCSS amb els continguts de l'ESO, algunes ampliacions en el camp de l'àlgebra i de l'anàlisi de funcions i el GeoGebra.

Deixa l'alumnat en disposició d'afrontar amb millors garanties de comprensió els conceptes nous que s'introdueixen en el batxillerat (límits, derivades ...)

La tecnologia permet de centrar-se en la reflexió del plantejament del problema i en el procés de resolució perquè l'allibera de les dificultats dels càlculs.

Obliga l'alumnat a centrar-se en l'explicació del procés per a la resolució del problema i l'ajuda a relacionar diferents visions d'un mateix problema: una més algèbrica i una altra més gràfica (especialment en les funcions, inequacions i programació lineal)

El material proposat permet un aprenentatge autònom sobre tot en els alumnes avançats. I als alumnes amb més dificultats els ajuda a visualitzar gràficament el problema, especialment en els problemes de funcions i programació lineal.

Permet a l'alumnat disposar en qualsevol moment del material amb què està treballant a classe i al professorat introduir-hi canvis i adaptacions que queden automàticament registrades en el document.

**Les matemàtiques a l'ESO, la selectivitat  
(matemàtiques de les CCSS) i el  
GeoGebra: una terna prodigiosa**

**5. Bibliografia.**

Guzmán Ozámiz, M. Tendències innovadores en educació matemàtica. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 1992, vol 7, p. 7-34

Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, 28 d'agost de 2015 Núm. 694, p. 2-305

Generalitat de Catalunya Universitats i recerca. *Models d'exàmens 2015, 2014 i 2013* [consulta: 16 de maig de 2016] Disponible a :  
<[http://universitatsirecerca.gencat.cat/ca/03\\_ambits\\_dactuacio/acces\\_i\\_admissio\\_a\\_la\\_universitat/proves\\_dacces\\_a\\_la\\_universitat\\_pau/models\\_d\\_examens\\_anteriors\\_2014\\_2013\\_i\\_2012/](http://universitatsirecerca.gencat.cat/ca/03_ambits_dactuacio/acces_i_admissio_a_la_universitat/proves_dacces_a_la_universitat_pau/models_d_examens_anteriors_2014_2013_i_2012/)>

GeoGebra. [consulta: 16 de maig de 2016]. Disponible a :  
<http://www.geogebra.org/cms/>

Selecat.cat. *PAU (Proves d'accés a la universitat): Exàmens i informació; de les matèries dels anys 2000-2015* [consulta: 16 de maig de 2016] Disponible a :  
<<http://selecat.cat/>>