

## Introducció a la mesura de la incertesa. La correspondència entre Pascal i Fermat i el *problema dels punts* (1654)

Fàtima Romero Vallhonestà<sup>1</sup>, M. Rosa Massa-Esteve<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, fatima.romero@upc.edu

<sup>2</sup> Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, m.rosa.massa@upc.edu

### Resum de la comunicació

L'activitat que presentem està dissenyada a partir de la correspondència que van mantenir Blaise Pascal (1623-1662) i Pierre de Fermat (1601-1665) l'any 1654 sobre l'anomenat *problema dels punts* i a partir també d'altres textos rellevants que serviran per posar l'alumnat en el context de les probabilitats. El disseny es va fer dins l'àmbit de treball del grup d'història de matemàtiques d'ABEAM i els seu objectiu és que els alumnes aprenguin conceptes i processos matemàtics a través de la seva història.

La correspondència entre Pascal i Fermat sobre quin és el repartiment més just de les apostes en una partida inacabada, és un exemple molt il·lustratiu sobre el procés de raonament matemàtic i posa de manifest els dubtes que tenien matemàtics de la talla de Pascal i Fermat a l'hora de resoldre alguns problemes. El procés per arribar a la solució pot contribuir a què els alumnes s'adonin que el treball en equip és important quan es tracta de construir coneixement.

**PARAULES CLAU:** Fermat, Pascal, probabilitats.

Aquests materials estan sota una llicència  
Creative Commons 4.0 Internacional del tipus



## Introducció

En el darrer decret de currículum de secundària<sup>1</sup>, es reforça la presència de la història de les matemàtiques amb relació a la que tenia en el decret del 2007. El que aleshores eren contextos han passat a formar part dels blocs de continguts, donant-los així més rellevància, de manera que es reconeix la importància de la història de les matemàtiques per a l'ensenyament de les matemàtiques.

Atès que la major part del professorat que imparteix matemàtiques no té una sòlida formació en història de les matemàtiques, aquesta comunicació pot aportar-los idees per treballar els continguts històrics del currículum de matemàtiques d'una manera competencial i interdisciplinària que no es limiti a recitar un recull d'anècdotes. Les activitats que proposem són només exemples que el professorat pot adaptar a la realitat concreta en què treballa. Les experiències d'ensenyament-aprenentatge són úniques i sovint irrepetibles; el que funciona en un context no té per què funcionar en un context diferent. En alguns casos caldrà presentar l'activitat molt pautada i en d'altres molt oberta.

D'acord amb Miguel de Guzmán (Guzmán, 1994), en la matemàtica el mètode ha de predominar sobre el contingut, i per tant, cal parar atenció en els processos de pensament que porten l'alumnat a resoldre els problemes. No és tan important el resultat final com el procés que hi pot portar, que pot ser útil per la resolució d'altres problemes que l'alumne hagi d'afrontar, sigui en la vida real, en les matemàtiques o en altres disciplines. Hauríem d'aconseguir que els alumnes entenguessin que el resultat final no és el més important en la resolució de les activitats que se'ls proposen, sinó el procés que ells mateixos han creat per intentar arribar-hi, ho aconsegueixin o no.

L'aproximació a les matemàtiques per part de l'alumnat a partir de la utilització de materials i metodologies diversos, contribueix a millorar el seu aprenentatge, ja que les habilitats de l'alumnat són també diverses. L'anomenada *perspectiva curricular* (Ainscow, 2004), explica moltes de les dificultats experimentades pels estudiants com el resultat de la forma d'organitzar els contextos i els resultats d'aprenentatge, en comptes de justificar-les només a partir dels propis dèficits dels estudiants. Amb aquesta perspectiva, aquestes dificultats haurien de representar un repte per enriquir les activitats que els proposem.

L'ensenyament de les matemàtiques utilitzant la seva història es pot considerar una metodologia d'aprenentatge que aporta una visió de les matemàtiques que està en la línia competencial del darrer decret de currículum. El processos i els continguts no s'introdueixen sense justificació, sinó que es motiven a partir de determinades situacions o contextos històrics. El fet de mostrar les dificultats que hi ha hagut al llarg de la història per tal de donar resposta a determinades preguntes que s'ha fet la humanitat o per resoldre determinats problemes, pot contribuir a motivar alguns estudiants, que sovint pel tipus d'ensenyament que han rebut, pensen que les matemàtiques estan reservades només a ments privilegiades.

Si bé allò que la història de les matemàtiques per ella mateixa pot aportar a la formació dels estudiants podria justificar la seva inclusió en el currículum, aquí es tracta d'aprendre matemàtiques a través de la seva història i no tots els textos històrics són idonis per

---

<sup>1</sup> DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria

aquest aprenentatge. S'han de tenir clars els criteris per triar-los i els objectius concrets que es pretén aconseguir amb l'activitat que es dissenya a partir del text escollit (Massa-Esteve, Guevara, Romero, Puig-Pla; 2011).

Les activitats que proposem estan relacionades amb un dels continguts del currículum del bloc d'estadística i atzar; "l'origen de la teoria de probabilitats". Tot i que l'activitat que forma part del títol de la comunicació està centrada en l'anomenat *problema dels punts*, primer es farà una introducció històrica a la teoria de probabilitats i es proposaran tres activitats més que ajudaran a situar l'alumnat en context abans de proposar l'activitat principal.

## 1. Context històric

Els jocs d'atzar han produït una fascinació que no ha deixat de créixer al llarg del temps, malgrat les restriccions legals i religioses que hi hagut en algunes èpoques.

En nombroses excavacions arqueològiques assíries i sumèries s'hi ha trobat el que probablement és l'avantpassat del nostre dau: l'astràgal (os que es troba per sobre del taló) de be, de cérvol o d'altres animals de mida semblant. L'astràgal, quan cau, ho pot fer en quatre posicions diferents, la probabilitat de les quals no és la mateixa. A més a més, cada astràgal té les seves característiques pròpies, fet que fa que qualsevol estudi sobre el seu comportament general (s'hagués intentat o no), estigués condemnat al fracàs.

Els jocs de daus, tal com els coneixem avui, tenen el seu origen a l'Orient, des d'on es van estendre fins a Egipte i Grècia passant per l'Índia i Aràbia. En l'antiguitat la seva funció, així com la d'altres estris aleatoris no es limitava a l'ús per al joc, sinó que es feien servir també com a oracle. Els feia servir tant la gent corrent per encarar els enigmes de la vida diària, com les classes sacerdotals a les cerimònies religioses. Amb l'aparició del cristianisme es va acabar la utilització pública dels daus com a mitjà per a conèixer el futur, però van continuar les pràctiques endevinatòries privades i l'ús del joc s'ha mantingut fins a l'actualitat.

Tot i l'antiguitat d'aquestes pràctiques, no és fins l'aparició de l'obra *Liber de Ludo Aleae* de Girolamo Cardano (1501-1576), que es va publicar pòstumament el 1663, que trobem la primera formulació explícita del concepte de lleis de l'atzar. Aquest llibre és molt interessant en el sentit que ens permet seguir el desenvolupament d'una investigació, ja que va corregint errades a mesura que l'obra avança. Hi apareixen resultats amb èxit per primera vegada alguns problemes relatius a diverses tirades de dau, i uns altres de menor importància d'astràgals i cartes mitjançant el recompte de tots els casos possibles. Cardano va considerar que la probabilitat d'obtenir un nombre concret almenys en una ocasió, si es llança un dau tres vegades, era la mateixa que la de no obtenir-lo.

Aquí es pot aprofitar per dir als alumnes que Cardano no va estar encertat amb aquest càlcul i animar-los a què opinin sobre si la probabilitat és superior o inferior. Per tal de comprovar-ho se'ls pot proposar la primera activitat que consisteix a llançar un dau tres vegades i repetir aquesta sèrie de tirades 50 vegades. Hauran d'anotar en quantes d'aquestes sèries ha sortit alguna vegada el nombre que havien pensat prèviament. Es fa després el recompte de les tirades de tots els alumnes i es calcula el percentatge d'èxit.

Ian Hacking (Hacking, 1995), en el seu llibre sobre el naixement de la probabilitat, es refereix a les explicacions que s'intenten fer per justificar la tardana aparició d'una teoria d'aquestes característiques. Opina que potser els autors es fan una pregunta equivocada, ja que en general, suposen que existia un objecte intel·lectual, algun concepte de probabilitat, que no era suficientment sotmès a reflexions matemàtiques. Però potser aquest objecte intel·lectual no existia i aleshores totes aquestes preguntes no tindrien sentit. Potser no ens hauríem de preguntar perquè no es van estudiar aquests objectes del pensament, sinó com van arribar a existir. El que hem d'entendre és un fet bastant específic que va succeir al voltant del 1600: el sorgiment del *nostre* concepte de probabilitat.

Molts científics i filòsofs es van ocupar tant de les qüestions pràctiques com de les teòriques relacionades amb el joc. Hem citat abans Cardano, però podem citar també Galileu del qual es conserva un fragment d'una obra que posa de manifest el que apuntava Cardano a la seva. Pascal i Fermat van mantenir el 1654 la seva famosa correspondència sobre temes relacionats amb el joc i la probabilitat. El concepte d'esperança matemàtica el va introduir Huygens el 1657 en el que es considera el primer text sobre probabilitat: *Calculating in Games of Chance*. Leibniz va fer també importants contribucions filosòfiques als fonaments de la teoria de la probabilitat, que va tenir un desenvolupament notable a la segona meitat del segle XVII. El moment culminant d'aquest desenvolupament va arribar amb Jakob Bernoulli i la publicació del seu llibre *Ars Conjectandi*, escrit la darrera dècada del segle XVII i publicat el 1713.

## 2. Activitats

La segona de les activitats que proposem és la lectura de l'opuscle de Galileu "sobre el joc dels daus". En aquest text Galileu estudiava si en llançar tres daus era més probable una suma 9 o una suma 10. Totes dues sumes es poden escriure de sis formes diferents utilitzant tres nombres:

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3,$$
$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$$

Els alumnes hauran de justificar, com feia Galileu, que la suma 10 és més freqüent que la suma 9 en aquest joc, fet que coneixien els jugadors més experimentats de l'època.

La realització d'aquesta activitat es pot introduir, si es creu convenient, amb preguntes com les següents o bé es pot proposar directament l'activitat i fer-los després les preguntes:

- Quants resultats diferents es poden obtenir en la tirada d'un dau?
- I si es llancen dos daus? Escriviu-los.
- Tots els resultats que es poden obtenir al llançar dos daus tenen la mateixa oportunitat de sortir?
- Quantes sumes diferents es poden obtenir al llançar dos daus? Tenen totes elles la mateixa oportunitat de sortir? Si haguéssiu d'apostar per alguns dels resultats possibles, per quin optaríeu?
- Completeu la taula de Galileu amb els resultats possibles de les sumes 11 a 18:

10		9		8		7		6		5		4		3	
6.3.1.	6	6.2.1.	6	6.1.1.	3	5.1.1.	3	4.1.1.	3	3.1.1.	3	2.1.1.	3	1.1.1.	1
6.2.2.	3	5.3.1.	6	5.2.1.	6	4.2.1.	6	3.2.1.	6	2.2.1.	3				
5.4.1.	6	5.2.2.	3	4.3.1.	6	3.3.1.	3	2.2.2.	1						
5.3.2.	6	4.4.1.	3	4.2.2.	3	3.2.2.	3								
4.4.2.	3	4.3.2.	6	3.2.2.	3										
4.3.3.	3	3.3.3.	1												
	27		25		21		15		10		6		3		1

Reproducció de la taula que hi ha a l'opuscle de Galileu "Sopra le scoperte dei dadi"

La tercera activitat consisteix en la lectura del punt 7 de la carta de Pascal a Fermat datada el dimecres 29 de juliol de 1654 i en la resolució de l'exercici que proposa de Méré a Pascal, justificant que han de ser 25 i no 24 el mínim nombre de tirades que s'han de fer amb dos daus per tal que la probabilitat d'obtenir algun cop dos sisos sigui més gran que la de no obtenir-los. Aquesta activitat és d'un nivell cognitiu superior al de les anteriors i, com ja s'ha dit anteriorment, és el professor qui l'ha de modelar en funció de l'alumnat a qui vagi dirigida.

En un altra carta Pascal va aclarir una mica el raonament de Méré:

"Ell em va dir que els nombres estaven equivocats per la raó següent: Si es vol treure un sis amb un dau, es té un avantatge amb 4 tirades. Si es volen treure dos sisos tirant dos daus es té desavantatge si només es tiren 24 vegades. Però, 24 és a 36 (nombre de casos possibles al tirar dos daus) com 4 és a 6 (nombre de casos possibles quan es tira un dau)."

Sembla que Pascal no va entendre gaire el raonament del cavaller de Méré que es basa en una regla que havia utilitzat Cardano i que va provar més endavant de Moivre en la seva *Doctrine of Chances* (1716). Aquesta regla feia referència a la determinació del *nombre crític* de tirades, és a dir, del nombre mínim de tirades que es necessiten per tal que la probabilitat d'un determinat succés sigui almenys  $\frac{1}{2}$ . La regla deia que si la probabilitat d'ocurrència d'un esdeveniment en un sol intent és  $1/N_0$ , aleshores el nombre crític és, amb bona aproximació, quan  $N_0$  no és massa petit,  $n_0 = \ln 2 \cdot N_0$ . L'error de Méré va ser creure que aquesta aproximació era una regla.

La darrera activitat que proposem tracta del problema *de la divisió o dels punts*, un dels problemes més famosos sobre probabilitats, que també va ser proposat per de Méré a Pascal. El que planteja aquest problema és com s'han de repartir els diners que s'han apostat en una partida que per algun motiu no s'ha pogut concloure. Durant al menys tres segles aquest problema havia estat un problema estàndard en els textos matemàtics i d'aquí la seva importància històrica. La primera versió impresa de la qual se'n té coneixement, es pot trobar a la *Summa* (1494) de Luca Pacioli (1445-1514) on enmig de diverses qüestions curioses proposa el problema següent:

*"Un equip juga a pilota de tal manera que necessita 60 punts per guanyar i cada joc val 10 punts. El que hi ha apostat són 10 ducats. Per un incident no es pot acabar la partida i un dels equips té 50 punts i l'altre 20. Es vol saber com s'ha de repartir el diner a cada equip.*

*He trobat diferents opinions sobre això i els arguments que donen em semblen insuficients, però jo buscaré la veritat i donaré la forma correcta de resoldre-ho". (Pacioli, 1494, 197<sup>1</sup>)<sup>2</sup>*

La solució que Pacioli (Pacioli 1494) proposa és el repartiment de l'aposta de manera proporcional als punts guanyats, és a dir, 5 a 2. Pascal i Fermat, en canvi, van fer servir arguments relacionats amb les probabilitats per tal de proposar el repartiment més just en aquest tipus de problemes. En aquest cas, Pascal i Fermat, utilitzant arguments probabilístics haurien arribat a la conclusió que el repartiment hauria de ser de 15 a 1, tot i que la manera d'arribar-hi hauria estat ben diferent.

Moltes versions del problema de la divisió tenen el punt de partida en els exemples de Fra Luca, però el problema és molt més antic. Oystein Ore (Ore, 1953) diu que el va trobar en un manuscrit italià del 1380 i que creu que té origen àrab.

L'enunciat que proposem pels alumnes és el següent:

*En Ferran i la Marta juguen a un joc d'atzar, és a dir, un joc en qual el fet de guanyar depèn de la sort, no de l'habilitat de cada jugador. Per cada partida guanyada, el jugador obté 10 punts i se'n requereixen 60 per guanyar. Les apostes són de 32 euros que s'emportarà el jugador que arribi primer als 60 punts. En un moment donat, quan en Ferran havia guanyat 5 partides i la Marta 4, és a dir, quan en Ferran té 50 punts i la Marta 40 el joc s'ha hagut d'interrompre per circumstàncies alienes als jugadors. Quina creieu que és la manera més justa de repartir els 32 euros de l'aposta?*

Aquí també es poden fer algunes preguntes que poden guiar l'activitat, abans o després que els alumnes hi hagin treballat:

- Explica la solució que Luca Pacioli donaria a aquest problema.
- Creus justa una distribució de l'aposta en funció del nombre de punts obtinguts quan la partida s'ha hagut d'interrompre?
- És possible que si la partida s'hagués pogut acabar l'hagués guanyat la Marta?
- Quines eren les condicions del joc?
- No seria millor tenir en compte les diferents maneres en què el joc podia haver acabat?
- Escribeu totes les possibilitats d'acabar el joc.

### 3. Metodologia

L'apartat "context històric" pot orientar el professorat abans de la realització de les activitats. Es pot anar dosificant aquesta informació o demanar als alumnes que busquin informació sobre alguns dels personatges que s'hi citen.

L'alumnat farà una lectura individual de les activitats i després es distribuirà en grups de 3 o 4 alumnes per tal de realitzar-les. Finalment es farà una posta en comú amb la

---

<sup>2</sup> Una brigata gioca apalla a. 60. el gioco e. 10. p caccia e fano posar duc. 10. acade p certi accideti che no possano fornire e luna pte a. 50. e l'altra a. 20 se dimanda che tocca p pte.de la posta.



intervenció del professor o la professora, que vetllarà perquè la manera de tancar l'activitat assegurï l'assoliment dels objectius pels quals havia estat dissenyada.

És important que els alumnes, a part de seguir el guió que se'ls proposa, escriguin algunes reflexions finals que incloguin allò que han après al realitzar l'activitat i aquells raonaments que els han portat a conclusions que després ells mateixos han considerat errònies. Aquestes reflexions permeten que l'alumnat s'adoni que els diferents passos que ha fet en el seu treball, no són una sèrie de càlculs o raonaments aïllats o inconnexos sinó que tenen un fil conductor ben definit. En aquesta activitat és molt important la comunicació de les idees i també una representació eficient dels possibles resultats tant pel que fa als casos del llançament de daus com en els resultats del joc. En aquest sentit aquesta activitat pot donar idees sobre com es pot contribuir a l'assoliment de la competència matemàtica: *emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques*, associada a la dimensió comunicació i representació.

#### **4. Reflexions finals**

La introducció a l'aula de conceptes i procediments a partir d'activitats relacionades amb la història de les matemàtiques és una experiència enriquidora tant pel professorat com per l'alumnat, com hem pogut constatar després d'haver-les experimentat a les aules.

Les activitats proposades permeten a l'alumnat fer conjetures sobre les solucions de problemes l'enunciat dels quals no és complicat d'entendre, la qual cosa sol animar els estudiants a pensar-hi. De fet, el problema dels punts està escrit en forma de conte al llibre "una partida inacabada", que forma part d'una col·lecció de llibres recomanats per infants a partir de 4 anys. Això no vol dir que hagin de copsar l'abast de les consideracions que s'hi fan, però pot ajudar-los a anar assumint que no sempre és fàcil donar resposta a una situació que se'ns planteja.

Tot i això, no es tracta ni molt menys d'un problema trivial. De fet, l'hem proposat també a diferents cursos de formació de professorat en història de les matemàtiques i hem obtingut diversitat de respostes. Algunes d'elles no tenien en compte les probabilitats de cada jugador de guanyar la partida. D'altres, donaven dues solucions en funció de si només s'havien de tenir en compte els jocs guanyats, o les possibilitats de guanyar la partida, sense decantar-se per cap d'elles i, lògicament, alguns proposaven la solució que actualment considerem més justa.

#### **5. Bibliografia**

Ainscow, Mel. *Special Needs in the Classroom. A Teacher Education Guide*. United Kingdom: UNESCO Publishing, 2n Edition, 2004. ISBN: 92-3-103952-0.

Bellhouse, David. Decoding Cardano's *Liber de Ludo Aleae*. *Historia Mathematica*, 32, 2005, p. 180-202.

Cardano, Girolamo. *Practica Arithmetice et Mensurandi singularis*. 1539. Reimpresa a Milà a *Opera Omnia* Vol. 4, 1663.

Fermat, Pierre de. *Oeuvres de Fermat*, Volume 2, 288-314. Letter LXX from Pascal to Fermat Wednesday, 29 July 1654, 1894.

Figueiras, Lourdes; Pomés, Juliet. *Una partida inacabada*. Barcelona: Editorial Cruïlla, 2010. ISBN: 978-84-661-2408-9.

Galilei, Galileo. "Sopra le scoperte de i dadi", *Le Opere di Galileo Galilei*. A. Favaro (ed.), Firenze: Edizione Nazionale (E.N.) ,Vol. VIII, 1718, p. 591-594.

Guzmán, Miguel de. *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Ediciones Pirámide, 1994. Colección "Ciencia Hoy". ISBN: 84-368-0810-X.

Hacking, Ian. *El surgimiento de la probabilidad*. Barcelona: Editorial Gedisa, 1995. ISBN: 97-88-474-3254-85.

Hald, Anders. *A History of Probability and Statistics and their applications before 1750*. New Jersey: John Wiley and Sons Inc., 2003. ISBN: 0-471-47129-1.

Massa-Esteve, M. Rosa; Guevara-Casanova, Iolanda; Romero Vallhonestà, Fàtima; Puig-Pla, Carles. Understanding mathematics using original sources. Criteria and conditions. A: Barbin *et al.* (ed.) *History and Epistemology in Mathematics Education*, Wien: HPM/ Verlag Holzhausen GmbH, 2011, p. 415-427. ISBN: 978-3-85493-208-6.

Ore, Oystein. *Cardano. The Gambling Scholar*. New Jersey: Princeton University Press, 1953.

Pacioli, Luca. *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita, Distinctio nona, tractatus I*, 197, Venecia: Paganino de Paganini, 1494.

Romero Vallhonestà, Fatima. The Importance of Games of Chance at the Inception of Probability Theory. A: *Innovative Methods for Science Education*. Bruneau, Grapí, Heering, Laubé, Massa-Esteve i de Vittori (eds.). Berlin: Frank & Time, 2012. ISBN: 978-3-86596-354-3.

Tabak, John. *Probability and Statistics. The Science of Uncertainty*. United States of America: Library Of Congress Cataloging-in-Publication, 2004. ISBN: 0-8160-4956-4.

Taboada-Vázquez, Raquel ¡Eureka! La creatividad en las matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía*, núm. 467. Març de 2016.

Tartaglia, Niccolo. *General Trattatto di Numeri et Misure*, llibre 16, secció 206. Venècia, 23 de març de 1566.