

**El teorema de Pitàgores als *Elements* d'Euclides (ca. 300 aC.)  
i a l'obra xinesa *Els Nou Capítols* (ca. s.I dC).**

**Iolanda Guevara,<sup>1</sup> Carles Puig-Pla<sup>2</sup>, Fàtima Romero<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Dept. d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya i Dept. de Didàctica de les Matemàtiques i Ciències Experimentals de la UAB, [iolanda.guevara@gmail.com](mailto:iolanda.guevara@gmail.com)

<sup>2</sup> Dept. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Barcelona, [carles.puig@upc.edu](mailto:carles.puig@upc.edu)

<sup>3</sup> Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica, Universitat Politècnica de Catalunya, [fatima.romerovallhonest@gmail.com](mailto:fatima.romerovallhonest@gmail.com)

### **Resum de la comunicació**

En aquesta comunicació es presenta una proposta didàctica implementada amb alumnes de 3r curs de l'ESO que a partir de la història de les matemàtiques permet veure com un mateix objecte matemàtic es treballa de dues maneres ben diferents. Les dues activitats estan dissenyades a partir de textos matemàtics originals o traduccions reconegudes d'aquests textos. Un dels textos escollits prové de la matemàtica grega: els *Elements* d'Euclides (ca. 300) i l'altre de la matemàtica xinesa: els *Nou Capítols sobre els procediments matemàtics* (ca. s. I). Aquestes activitats es van dissenyar dins de l'àmbit de treball del grup d'història de les matemàtiques d'ABEAM.

**PARAULES CLAU:** teorema de Pitàgores, història de les matemàtiques, raonament geomètric.

Aquests materials estan sota una llicència

Creative Commons 4.0 Internacional del tipus 

## 1. Introducció

Aquesta comunicació vol aportar una visió de les matemàtiques que estigui en la línia de l'aprenentatge per competències del document *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic* (2013, segona edició 2016) institucionalitzat en el decret 187/2015 del currículum de l'ESO. En termes generals pretén contribuir a treballar continguts històrics del currículum de matemàtiques d'una manera competencial i interdisciplinària. De forma més concreta contribueix al desenvolupament de la competència 9: *representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic*.

L'activitat proposada s'ha implementat de manera que els alumnes han fet una primera lectura individual, després han treballat en grups de 3 o 4 alumnes i finalment s'ha fet una posta en comú amb la intervenció del professor o la professora que ha vetllat perquè, en tancar l'activitat, s'assoleixin per part dels alumnes els objectius proposats.

Per tal de fer un millor seguiment del que estan aprenent els alumnes, és recomanable que els alumnes, a banda de seguir el guió que se'ls proposa, escriguin algunes reflexions finals que incloguin allò que han après en realitzar l'activitat. Aquestes reflexions són importants perquè l'alumnat s'adoni que els diferents passos que ha fet en el seu treball, no són una sèrie de càlculs o raonaments aïllats o inconnexos sinó que tenen un fil conductor.

## 2. La universalitat de l'activitat matemàtica

Com assenyala Alan J. Bishop, un matemàtic, físic i professor emèrit d'educació matemàtica a la Universitat de Monash (Victoria, Austràlia), hi ha certes activitats fonamentals basades en l'entorn físic i social que són essencials per al desenvolupament del coneixement matemàtic. Comptar, localitzar, mesurar, dissenyar, jugar i explicar són activitats que es troben a totes les cultures del món i que tenen una importància cabdal per al desenvolupament de la comprensió matemàtica.

El teorema de Pitàgores és una mostra d'aquesta universalitat de les matemàtiques ja que es troba en diferents cultures. Per a les activitats que es presenten s'han triat dos textos clàssics en els que apareix aquest teorema: els *Elements* d'Euclides (ca. 300) i els *Nou Capítols sobre els procediments matemàtics*, text clàssic de la matemàtica xinesa antiga (ca. s. I).

La proposta didàctica consisteix en introduir els alumnes en els dos tipus de raonament (*Euclides vs. Nou Capítols*) i fer-los conscients que un mateix objecte matemàtic (teorema de Pitàgores) apareix en diferents cultures i en diferents civilitzacions, fent evident amb aquest exemple la universalitat de les matemàtiques.

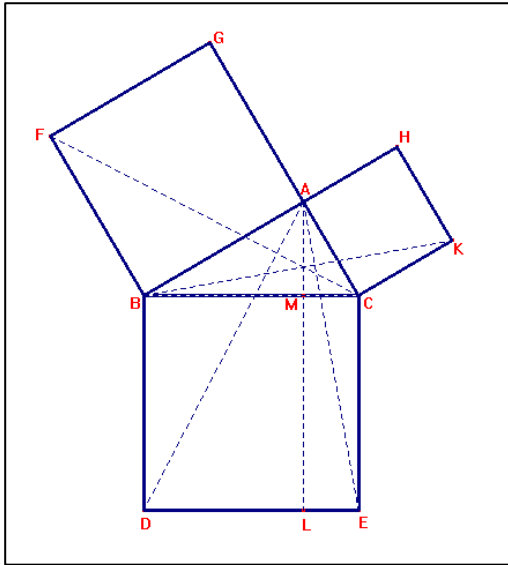


Fig. 1. En els *Elements* d'Euclides Edició de Heath de 1908.

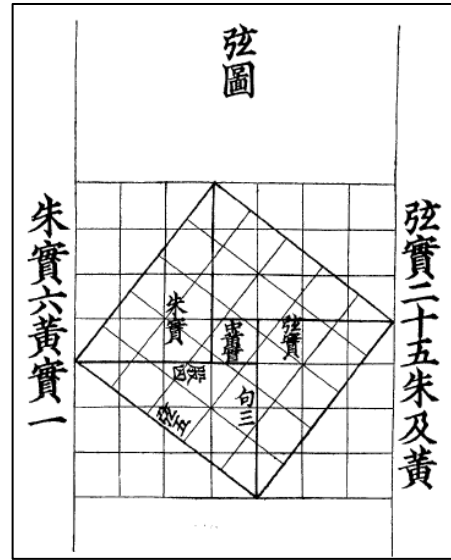


Fig. 2. En els *Nou Capítols* Edició de Bao Huanzhi, 1213.

Tradicionalment el teorema de Pitàgores s'ha enunciat de la forma següent: *en un triangle rectangle la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la hipotenusa*. Si els catets són  $a$  i  $b$ , i la hipotenusa  $c$ , l'expressió algebraica associada és:  $a^2 + b^2 = c^2$

Si a més s'acompanya l'enunciat amb un dibuix, aquest podria ser com el que es veu a la figura següent.

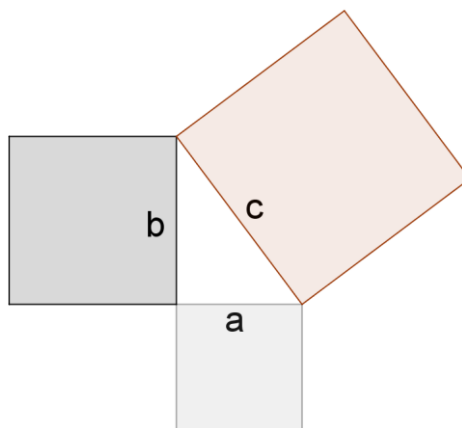


Fig. 3. El teorema de Pitàgores des del punt vista geomètric.

La història de les matemàtiques ens mostra que aquest teorema ha tingut diverses formulacions. Les dues que s'han triat, si bé pertanyen a dues cultures ben diferents tenen en comú que utilitzen en la seva demostració figures geomètriques i contenen raonaments, alguns visuals, que recolzen en aquestes figures.

Com va dir Joseph Needham (Londres, 1900 - Cambridge, 1995), la ciència moderna és essencialment internacional està constituïda gràcies a les aportacions de totes les tradicions científiques del planeta. Aquest bioquímic i historiador de la ciència va ser pioner en els estudi de la Ciència i la Tecnologia a l'Antiga Xina. Ell va ser el promotor de l'obra *Science and Civilisation in China*, un exhaustiu estudi de l'antic desenvolupament científicotècnic xinès.

### 3. El teorema de Pitàgores en els *Elements* d'Euclides

El teorema que ens ocupa porta el nom referit a Pitàgores de Samos, un matemàtic grec del s. VI aC. Tanmateix la primera demostració formal que ha arribat fins als nostres dies és la que es troba en els *Elements* d'Euclides.

Els *Elements* d'Euclides comença amb una primera part de definicions, postulats i axiomes i a continuació segueixen tretze llibres o capítols. Aquests llibres recullen els coneixements matemàtics de les diferents escoles gregues de l'època. En els sis primers llibres es tracta la geometria plana i s'inclou també la teoria de les proporcions d'Èudox; els tres següents es dediquen a l'aritmètica les progressions (el que avui denominem teoria de nombres); el desè llibre tracta els incommensurables i els tres darrers la geometria dels sòlids.

El teorema de Pitàgores es correspon amb la Proposició 47 del Llibre 1. L'enunciat d'aquesta proposició diu així: *En els triangles rectangles, el quadrat sobre el costat que correspon a l'angle recte és igual als quadrats sobre els costats que formen l'angle recte.*

L'enunciat és geomètric, parla d'un triangle rectangle, de quadrats i de la relació entre ells. La demostració també segueix el fil geomètric i visual. Es tracta de comparar dos quadrats construïts sobre els costats que formen l'angle recte, els que avui anomenem catets, amb els dos rectangles que descomponen el quadrat construït sobre el tercer costat del triangles, el que avui anomenem hipotenusa, tal com es pot veure a la figura següent.

En la terminologia actual comparar un quadrat i un rectangle i dir que són iguals vol dir que tenen la mateixa àrea<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> De fet Euclides no parla de mesura ni d'àrea. En la terminologia grega dir que dues figures eren iguals volia dir, en el nostre llenguatge, que o bé eren congruents o bé tenien la mateixa àrea.

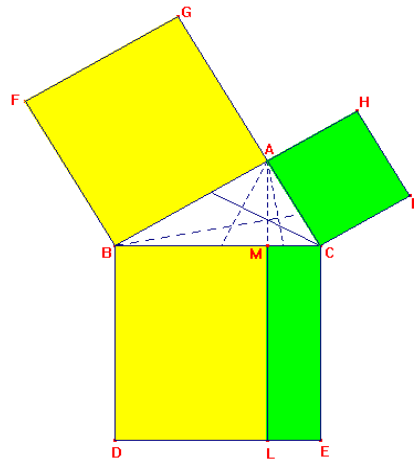


Fig. 4. Els quadrats construïts sobre els costats del triangle

El fil conductor de la demostració és totalment geomètric i passa per establir la igualtat entre dos triangles, associats cadascun d'ells amb el quadrat i el rectangle corresponent que es volen igualar. En dissenyar l'activitat pels alumnes es va partir de les il·lustracions (figura 1) de l'edició de Heath (1908) i des del Grup d'història d'Abcam es van elaborar figures intermèdies que permetessin seguir el raonament com les que es mostren a les figures 4 i 5.

Les tres figures següents representen tres de les quatre situacions que es descriuen a continuació.

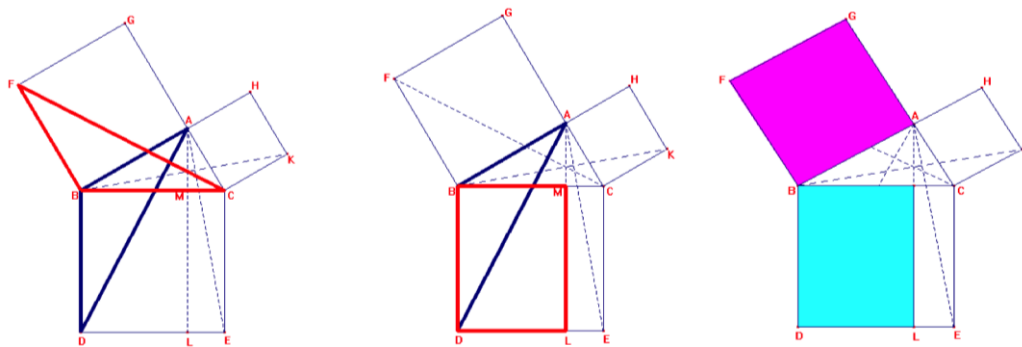


Fig. 5. Tres figures que resumeixen el procés de demostració

El procés de demostració es pot associar a l'evolució de quatre situacions geomètriques:

- a) La igualtat entre el triangle ABD i el FBC.
- b) La relació 2 a 1 entre un el paral·lelogram BL i el triangle ABD.
- c) La relació 2 a 1 entre quadrat GB és el doble del triangle FBC.

d) La igualtat entre paral·lelogram BL i el quadrat GB.

La proposta didàctica per als alumnes consisteix en reproduir la demostració a la manera d'*Euclides* amb l'ajut d'una guia dels passos a fer a partir d'unes figures inicials ja dibuixades i anant establint deduccions successives en cadena de caire geomètric. Es parteix de la figura inicial (figura 1) i es demana als alumnes que raonin i escriguin perquè determinades figures són iguals (triangles de la figura 5) o una doble de l'altra (triangle i rectangle de la figura 5).

#### 4. El Teorema de Pitàgores en els *Nou Capítols*

La demostració del teorema en els Elements d'Euclides és geomètrica; passa per la comparació entre figures (àrees) de triangles, quadrats i rectangles, es dona en el context de la matemàtica grega basada en la prova i en el raonament de tipus axiomàtic-deductiu.

Les matemàtiques xineses, (ca. s. I), operaven perfectament bé "sense" la prova axiomàtica-deductiva. Els textos clàssics contenien descripcions d'algorismes de càlcul per trobar les solucions dels problemes plantejats però cap tipus d'explicació sobre perquè el procediment funcionava. Cap al s. III, s'introdueixen explicacions del significat de les operacions realitzades. En molts casos, aquestes explicacions es refereixen a figures geomètriques. També és així en l'explicació del teorema de Pitàgores.

En la matemàtica xinesa antiga el teorema es troba en els *Nou Capítols sobre els procediments matemàtics* (ca. s. I), text anònim i de controvertida datació, entre s. I aC i s. I dC que recull el saber matemàtic de l'època i que en certa manera va ser per a la matemàtica xinesa antiga el llibre clàssic de referència, com ho van ser els *Elements* d'Euclides per a la matemàtica occidental.

Com el seu nom indica, l'obra consta de nou capítols però a diferència de l'obra grega els noms de capítols i el seu contingut fan referència bàsicament a qüestions pràctiques. Així:

Capítol 1: Camp rectangular

Capítol 2: Cereals

Capítol 3: Distribució per progressions

Capítol 4: Quant mesura l'amplada?

Capítol 5: Consultes sobre treballs d'enginyeria

Capítol 6: Taxes justes

Capítol 7: Excedent i dèficit

Capítol 8: Files rectangulars (*Fangcheng*)

Capítol 9: Base i altura (*Gougu*)

És en el capítol 9, *Base i altura (Gougu)*. Per tractar l'altura i la profunditat, l'amplada i la longitud, és on cal buscar el teorema que rep el nom de "procediment de la base i de l'altura".

En els tres primers problemes del capítol 9, s'estableix la relació 3, 4 i 5 entre els costats d'un triangle rectangle. Així el problema 1 diu que si un triangle rectangle té de base 3 i d'altura 4 la seva hipotenusa és 5; el problema 2 que si un triangle rectangle té 5 d'hipotenusa i 3 de base la seva altura és 4, i el problema següent que si un triangle rectangle té 4 d'altura i 5 d'hipotenusa la seva base és 3. A continuació es descriu el procediment de càlcul per a un cas qualsevol de la forma següent: *base (gou) i altura (gu), si es multiplica cada una per ella mateixa, se sumen (els resultats) i es divideixen per l'extracció de l'arrel quadrada, el que dóna és la hipotenusa.*

Convé aclarir que el text clàssic del s. I, no demostra ni justifica l'algorisme de càlcul que descriu. Cal esperar uns segles perquè matemàtics com Lui Hui (263) o Li Chunfeng (656) mostressin en edicions posteriors la correcció dels algorismes del text clàssic i expliquessin el significat de les operacions realitzades.

Liu Hui no solament dóna una interpretació de la situació apel·lant a la descripció geomètrica: *el costat més curt s'anomena base (gou); el costat més llarg altura (gu); el que uneix les cantonades l'una amb l'altra s'anomena hipotenusa (xian);* sinó que també introdueix una justificació basada en termes geomètrics. Així, Liu Hui diu: *La base multiplicada per ella mateixa fa un quadrat vermell, l'altura per ella mateixa un quadrat blau-verd, i es fa de tal manera que es recomponen els uns amb els altres; partint del fet que es guarden tots els trossos que queden sense bellugar, es genera per reunió l'àrea del quadrat del costat de la hipotenusa. Dividint aquesta per l'extracció de l'arrel quadrada donarà la hipotenusa.*

Les descripcions geomètriques i en colors de Liu Hui són això, descripcions geomètriques. El seu text no contenia figures o, en tot cas, no es té constància que hi fossin. Alguns historiadors suposen que els textos anaven acompanyats de figures i cossos geomètrics, potser de fusta, per visualitzar millor les descripcions que contenien. En qualsevol cas les figures de les que sí es conserven evidències escrites daten del segle XIII (figura 2).

En estudis historiogràfics dels *Nou capítols* realitzats per diferents historiadors de les matemàtiques xineses (Cullen, 1996; Chemla i Shuchun, 2004; Dauben, 2007) han reconstruït les figures i cossos geomètrics als que al·ludeixen els comentaristes Liu Hui i Li Chunfeng. Segons la reconstrucció de Chemla i Shuchun del procediment de la base i de l'altura, aquest aniria acompanyada de les dues figures següents.

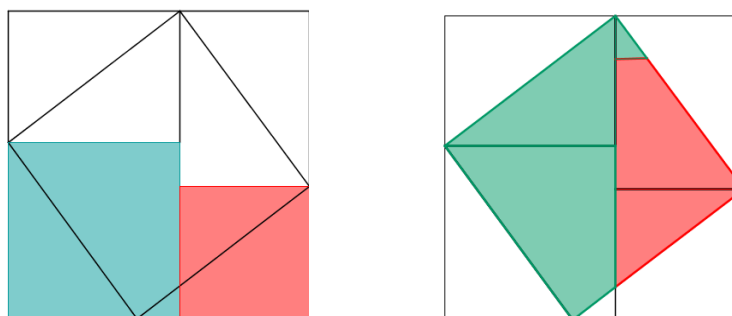


Fig. 6. La justificació del procediment de la base i l'altura a partir de les figures descrites per Liu Hui, segons Chemla i Shuchun

A partir del procediment de la base i l'altura es construeix la seqüència d'activitats per als alumnes implementada amb alumnes de 3r d'ESO. La proposta didàctica comença dibuixant un triangle rectangle qualsevol, després es construeixen els tres quadrats corresponents retallant paper. Finalment, cal veure que realment el quadrat gran conté els altres dos. Es fan dos jocs de quadrats (dos verd-blaus i dos vermells). Un es deixa sencer i l'altre es retalla segons la figura anterior.

Les produccions dels alumnes tenen un aspecte semblant al de la figura següent.

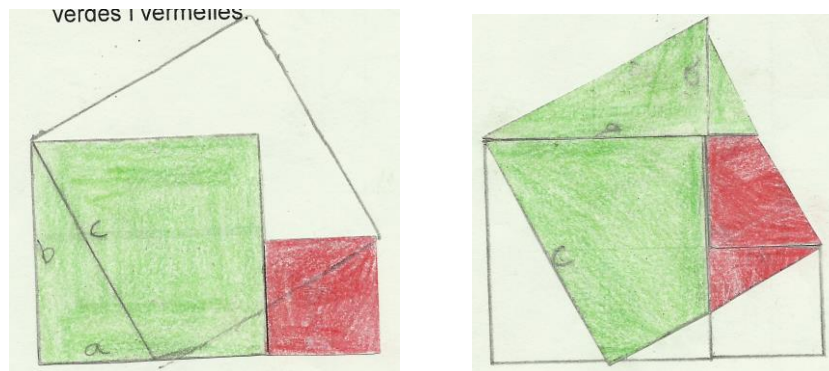


Fig. 7. Producció d'una alumna requerida a justificar el procediment de la base i l'altura, retallant i enganxant quadrats de colors

## 5. Consideracions finals

Amb aquestes dues activitats, els alumnes han pogut adonar-se que un mateix problema, pot tenir diversos procediments per resoldre's. Si bé els dos raonaments estan basats en la comparació de figures, en termes actuals, comparació de les seves àrees, la manera de fer-ho és ben diferent.

En els *Elements* d'Euclides es parteix el quadrat construït sobre la hipotenusa del triangle rectangle i els dos rectangles obtinguts es comparen amb els quadrats construïts sobre els altres dos costats. El procés passa per introduir uns triangles dins de la figura que seran iguals i que es compararan amb els quadrats i els rectangles inicials. Les figures es parteixen i es comparen però romanen estàtiques.

En els *Nou Capítols* també es construeixen els tres quadrats sobre els respectius costats del triangle rectangle, però la demostració es basa en el moviment. Els dos quadrats sobre els costats de l'angle recte es mouen i es posen un a continuació de l'altre. Després s'encaixa el tercer quadrat en aquesta nova figura formada per dos quadrats. Una part dels dos quadrats ja forma part del quadrat gran, només cal retallar el que queda fora i recol·locar-ho dins per veure que entre totes les peces dels dos quadrats petits s'omple el tercer quadrat més gran. Tot es mou però finalment cada peça queda al lloc adequat.



La proposta didàctica permet que els alumnes visquin resoldre un mateix problema de dues maneres diferents, a la manera d'Euclides i a la manera de Liu Hui. S'ha donat una dimensió personal i humana de les matemàtiques. S'han posat a la pell de dos personatges de la història de les matemàtiques, un de la cultura occidental i l'altre de la cultura oriental, de manera que han pogut comprovar la universalitat de les matemàtiques.

## 6. Bibliografia

Bishop, A.J. (1999) *Enculturación matemàtica. La educación desde una perspectiva cultural*, Barcelona, Paidós.

Chemla, K. & Shuchun, G. (eds.) (2005) *Les neuf chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaries*. París, Dunod.

Cullen, C. (1996) *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The zhou bi suan jing*. Cambridge/New York, Cambridge University Press.

Dauben, J. W. (2007) "Chinese mathematics". A: Katz, Victor J. (ed.), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook (187-384)*, New Jersey, Princeton University Press.

Fauvel, J. & Maanen, J. V. (eds.) (2000) *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht, Kluwer.

Guevara-Casanova, I.; Puig-Pla, C. (2012) "L'ús de la geometria dinàmica en la deconstrucció de les figures fonamentals de la matemàtica xinesa antiga". A: Grapí, P.; Massa, M. R. (ed.) *Actes de la IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona, SCHCT-IEC, 61-72.

Guevara, I. (2014) "El teorema de Pitàgoras y la resolución de la ecuación de segundo grado en los *Nueve Capítulos de los procedimientos matemáticos*". A: Blanco, M. (coord) *Enseñanza e Historia de las Ciencias y de las Técnicas: Orientación, Metodologías y Perspectivas*, Barcelona, SEHCYT, 229-336.

Guevara, I (2015) *L'ús de contextos històrics a l'aula de matemàtiques de secundària: El cas concret de la visualització en la connexió geometria-àlgebra*. (Tesi doctoral). Universitat de Barcelona. <http://hdl.handle.net/10803/301766> (Darrer accés: 31/01/16).

Heath, Sir Thomas Little (1908) *The thirteen books of Euclid's Elements* translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. University Press, Cambridge, 3 vols., 1908. [Segona edició: University Press, Cambridge, 1925. Reimpresió: Dover Publ., New York, 1956].

Kao, T. I. & Swetz, F. J. (1977) *Was Pythagoras chinese? An examination of right triangle theory in ancient China*. London, the Pennsylvania State University Press.

Massa, M.R. (2003) "Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica". *Biaix*, 2, 4-9.

Romero, F., Guevara, I., Massa, M.R. (2007) "Els Elements d'Euclides. Idees trigonomètriques a l'aula". A: *Actes de la I Jornada sobre Història de la Ciència i Ensenyament "Antoni Quintana Marí"*, Barcelona, SCHCT, 113-119.

Romero, R. Puig-Pla, C.; Massa, M.R.; Guevara, I. (2009) "La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per treballar a l'aula", *Actes d'història de la ciència i de la tècnica*, vol 2 (1), 427-436.

Romero, F.; Massa, M.R.; Guevara, I.; Puig-Pla; Roca-Rosell, A. (2015) "Teacher training in the History of Mathematics". A: Barbin *et al.* (ed.) *History and Epistemology in Mathematics Education*, Copenhagen, HPM/ Aarhus University, 113-128.

Siu, M-K (2000) "An Excursion in Ancien Chinese Mathematics". A: Katz, Victor J.(ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*. Washington, The Mathematical Association of America, 159-166.