

Famílies de funcions. Un exemple amb dades reals*

Onofre Monzó¹, María Teresa Navarro²

¹ IES Veles e Vents, 4900 Torrent, Onofre.Monzo@uv.es

² IES Veles e Vents, 4900 Torrent, Teresa.Navarro-Moncho@uv.es


Resum del taller

En el document de discussió per a l'ICMI Study *The Future of The Teaching and Learning of Algebra* s'incloueren algunes preguntes referides a l'ús de dades reals en l'ensenyament de l'àlgebra. Les calculadores CP400 permeten que siga possible que les dades reals s'obtinguen en experiments realitzats a l'aula i presentats en tres sistemes de signes –taules, gràfiques cartesianes i expressions algebraiques– mitjançant un procés de modelització. En aquest ocasió proposem realitzar un activitat d'intercanvi de calor en la qual es pretén ensenyar les competències algebraiques que estan lligades al procés de modelització; en particular, les relacionades amb la manipulació de les expressions algebraiques per a reduir-les a formes canòniques, que expressen propietats del fenomen que es modelitza.

PARAULES CLAU: Modelització, dades reals, àlgebra.

Altres persones que són autores dels treballs a què aquesta aportació fa referència:
Luis Puig Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València Estudi General, València, Luis.Puig@uv.es

Aquests materials estan sota una llicència

Creative Commons 4.0 Internacional del tipus 

* Aquesta investigació ha sigut realitzat en el context del projecte d'Investigació EDU2015-69731-R cofinanciat pel Ministeri d'Economia i Competitivitat i el Fons Europeu de Desenvolupament Regional (FEDER).

INTRODUCCIÓ

El que presentem en aquest taller forma part d'un estudi que estem desenvolupant des de fa ja uns anys sobre l'ensenyament i l'aprenentatge del procés de modelització, i l'aprenentatge dels conceptes de famílies de funcions i de paràmetre, del qual hem anat donat compte en diverses publicacions (Monzó y Puig, 2007, 2008, 2010, 2011, 2012a, 2012b, Puig y Monzó, 2013, Monzó, Navarro y Puig, 2013, 2016, Navarro, Monzó y Puig, 2015a, 2015b)

La nostra idea central és que el model d'ensenyança produeix una comprensió rica dels conceptes de família de funcions i desenvolupa la competència en la transformació d'expressions algebraïques al donar-li sentit a aquestes transformacions, gràcies a que té les següents característiques generals:

1. S'utilitza un entorn que disposa de càlcul simbòlic, recollida de dades experimentals mitjançant sensors, representació en taules y gràfiques cartesianes i tractament estadístic de dades.

2. Es planteja l'estudi de la forma canònica $y = a f\left(\frac{x - c}{b}\right) + d$ de famílies de funcions prestant especial atenció al significat dels paràmetres i la interrelació entre els seus canvis, els de la gràfica corresponent i els del fenomen que modelitzar.

3. Es plantegen situacions problemàtiques en les quals es realitzen experiments per a obtenir dades reals de fenòmens que es modelitzen amb aquestes famílies de funcions.

Però a més, com el procés de modelització és un procés de resolució de problemes, cal incorporar al model d'ensenyança la necessitat d'una bona gestió del procés, i incloure en l'ensenyança els procediments específics que permeten realitzar-la. La nostra idea és que l'anàlisi qualitatiu del fenomen d'una banda i, d'altra, de les característiques de les famílies de funcions i el significat dels paràmetres, és un element crucial en la gestió del procés de modelització per part dels alumnes. Aquests anàlisis qualitius estan així explícitament incorporats a l'ensenyança.

En les publicacions anteriorment citades descrivim amb cert grau de detall els fonaments teòrics del model d'ensenyança, i els materials i alguns resultats parcials d'un experiment d'ensenyança en què l'entorn utilitzat ha sigut les calculadores gràfiques Classpad 300, Classpad 330 o Classpad 400.

L'EXPERIMENT

La situació que hem triat per a modelitzar es l'intercanvi de calor. Hem dividit l'experiment en dues parts, en la primera el que volem estudiar és el que transcorre des què retirem un cos d'una font de calor fins que aquest assoleix la temperatura ambient, examinant la relació entre la temperatura del cos i el temps transcorregut. Analitzarem la funció que descriu el refredament d'un cos a partir d'una temperatura aproximada de 60°C. Prendrem dades durant cinc minuts, a intervals de 0,3 segons, des del moment en què separarem el sensor de la font de calor.

En la segona part, refredarem un cos i analitzarem la funció que descriu el seu

calfament a partir d'una temperatura aproximada de -10°C . Per acabar, ajustarem les dades mitjançant dues funcions, les compararem i analitzarem les seues diferències.

Objectius

- Fer servir la calculadora per construir models de situacions a partir de dades reals recollides mitjançant sensors.
- Interpretar els resultats del model i analitzar críticament les possibles aplicacions i modificacions del model.
- Estudiar els processos de pensament relacionats amb la construcció de models i la resolució de problemes de matemàtiques: validació, implementació, generació de resultats, anàlisi crític dels resultats, generalització.

Continguts

- Obtenció de dades reals amb l'ús de sensors de temperatura.
- Construcció i anàlisi de models sobre les dades recollides mitjançant els sensors.
- Estudi dels processos en la resolució de problemes de modelització.

Metodologia

La participació activa del professorat en l'activitat és la via de consecució dels objectius. Els assistents treballaran per grup en la resolució de l'activitat de modelització proposada. Hi haurà una discussió general sobre el procés de resolució de l'activitat i es reflexionarà sobre la seua implementació a les classes d'ESO i batxillerat.

Materials

Els materials escrits per a seguir el taller el taller són massa extensos per incloure'ls, ara bé si els voleu consultar els trobareu a l'annex.

MODEL D'ENSENYAMENT- ENSENYANÇA

El model d'ensenyament es basa en les competències necessàries en un procés de modelització. Aquestes competències, que detallem a continuació, estan descrites en Monzó i Puig (2012a):

1. Propietats qualitatives dels tipus de funcions disponibles.
2. Anàlisi qualitatiu del fenomen que va a observar-se, respecte al mateix tipus de propietats.
3. Formes canòniques dels tipus de funcions.
4. Significat dels paràmetres de les formes canòniques.
5. Efecte dels canvis en els paràmetres en les propietats.
6. Transformacions algebraiques per portar una expressió algebraica a una forma canònica.
7. Anàlisi qualitatiu de les limitacions del model.

Els punts 1 i 2 mostren la importància del coneixement qualitatiu tant del fenomen com

de diversos tipus de funcions, ja que en el procés de modelització aquests coneixements juguen un paper molt important en la presa de decisions sobre quin (o quins) tipus de funció va a ser el que es va a utilitzar com a model per a predir altres valors del fenomen que no s'han obtingut experimentalment.

L'elecció de les preguntes abans de realitzar l'experiment que anem a realitzar respon als elements descrits en Monzó i Puig (2012a) que, de manera esquemàtica, podem dir que estan presents en qualsevol procés de modelització:

1. Un fenomen que es descriu mitjançant algunes mesures d'algunes magnituds.
2. Una regressió entre les mesures.
3. Un tipus de funció que s'ajusta mitjançant aquesta regressió.
4. Una decisió sobre el tipus de funció que es va a ajustar d'entre un catàleg de funcions disponibles, basat en:
 - 4.1. Un coneixement de propietats qualitatives del fenomen.
 - 4.2. Un coneixement de propietats qualitatives dels tipus de funcions disponibles.
5. La determinació de la funció concreta d'aquest tipus, que descriu les dades obtingudes del fenomen concret observat.
6. L'expressió de la funció en una forma canònica, elegida de manera que els paràmetres expressen propietats del fenomen que interessa destacar.

CONCLUSIONS

En aquest taller presentem el disseny i els materials d'una seqüència d'ensenyança en què la pretensió és que els alumnes puguin elaborar els conceptes de famílies de funcions i paràmetres en el context de la resolució de problemes de modelització i a través d'aquest procés, que també és objecte d'estudi. Algunes de les conclusions que hem obtingut dels resultats parcials de l'estudi amb els alumnes són:

1. L'anàlisi qualitatiu del fenomen estudiat, així com el coneixement de les propietats qualitatives de les famílies de funcions, són elements decisius en el procés de modelització, ja que, com hem pogut observar, els estudiants es basen en aquests per a prendre decisions i justificar respostes.
2. L'anàlisi qualitatiu permet controlar el procés, orientant quin model funcional sembla més adequat i quin no sembla adequat per a modelitzar el fenomen, però no és suficient per a obtenir la funció que modelitza el fenomen.
3. El professor és també un recurs en el procés de modelització, doncs, davant e la carència d'algun dels coneixements exigits, de les característiques del fenomen, de la família de funcions idònia o de l'ús de la calculadora, es recorre a ell per a eixir del bloqueig.
4. L'ús de la calculadora no anul·la el professor, sinó que el situa d'altra manera en el paper central d'organitzador del treball de l'alumne.

5. L'ús de dades reals i la necessitat de tenir l'expressió de la funció que les modelitza en una determinada forma canònica (la que té la calculadora) suposa un context favorable per a la manipulació algebraica.

BIBLIOGRAFIA

CASIO. "Class Pad II fx-Cp400. Guía del usuario". CASIO COMPUTER CO.,LTD. Tokyo. 2014.Consultable en:

support.casio.com/es/manual/004/ClassPadII_UG_ES.pdf.

Monzó, O. y Puig, L. "Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte". Veintidós Séptimos, 2007, núm. 24, pp. 26-29.

Puig, L. y Monzó, O. "Competencias algebraicas en el proceso de modelización". En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.) El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana. Castellón: SEMCV. 2008. pp. 142-158

Monzó, O. y Puig, L. Modelización con calculadoras gráficas. Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Badajoz. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. 2008

Monzó, O. y Puig, L. "Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte". Veintidós Séptimos, 2010, núm. 26, pp. 4-6.

Monzó, O. y Puig, L. Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (vol. I). Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī". València. 2011. pp. 167-185.

Monzó, O. y Puig, L. Competencias algebraicas en el proceso de modelización. *Actas de las 15 Jornadas sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Profesores de Matemáticas.* 2012.

Monzó, O. y Puig, L. "Familias de funciones". En Torralbo, M. y Carrillo, A. (Eds.) Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didáctica. SAEM "Thales" y División didáctica CASIO-Flamagas. Sevilla. 2012. pp. 103-133.

Puig, L. y Monzó, O. "Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones". En T. Rojano (Ed.) Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. Trillas. México. 2013. pp. 9-35.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (). Un estudio sobre el proceso de modelización en el entorno informático de las tabletas. En actas de las XVI JAEM. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Palma. 2013.

Consultable en:

xvi.jaem.es/actas/documentos/comunicaciones/comunicacion_148__un-estudio-sobre-el-proceso-de-modelizacion-en-el-__monza3-onofre_et_altri.pdf.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (). Una actividad de modelización en el entorno informático de las tabletas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 2016, 72, pp.67-74.

Navarro, M. T., Puig, L. y Monzó, O. Un estudio sobre modelización en la iniciación de la función seno en secundaria. En actas de las XVII JAEM. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Cartagena. 2015

Consultable en: 17jaem.semm.com/aportaciones/n128.pdf.

Navarro, M. T., Monzó, O y Puig, L. Modelización con el uso de sensores y datos dinámicas. En actas de las XVII JAEM. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Cartagena. 2015.

Consultable en: 17jaem.semm.com/aportaciones/n129.pdf.

Puig, L. (). Modelización con datos reales. En actas de las XVI JAEM. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Palma. 2013.

Consultable en: xvi.jaem.es/actas/documentos/ponencia/ponencia_2a__modelizando-con-datos-reales__puig-luis.pdf.